

MARCO PAULO DE CARVALHO TORRES

**UMA ABORDAGEM COMPUTACIONAL PARA PREVISÃO DE
FADIGA DE METAIS DUROS**

**Dissertação apresentada como requisito parcial à
obtenção do grau de Mestre em Ciências.
Programa de Pós-Graduação em Métodos
Numéricos em Engenharia. Universidade Federal
do Paraná**

Orientadores: Mildred Ballin Hecke D.Sc.

Roberto Dalledone Machado D. Eng.

CURITIBA

2004

TERMO DE APROVAÇÃO

MARCO PAULO DE CARVALHO TORRES

UMA ABORDAGEM COMPUTACIONAL PARA PREVISÃO DE FADIGA DE METAIS DUROS

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – Área de Concentração em Mecânica Computacional, da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador:

Prof^a Mildred Ballin Hecke, D. Sc.
Centro de Estudos de Engenharia Civil / CESEC – UFPR

Prof. Roberto Dalledone Machado, D.Eng.
Centro de Estudos de Engenharia Civil / CESEC – UFPR

Prof. Nestor Alberto Zouain Pereira, Ph.D.
COPPE – UFRJ

Curitiba, 07 de maio de 2004.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a minha querida esposa, Andreza Cristina Baggio Torres pela compreensão e suporte durante todo o tempo em que tive que me dedicar aos meus estudos e trabalhos, da mesma forma, também agradeço muito aos meus pais, Paulo Celso Pereira Torres e Janilde da Graça de Carvalho Torres, por toda a base e apoio fornecido que possibilitaram que eu construísse minha carreira e meu trabalho.

Agradeço aos meus orientadores, a Prof^a Dra Mildred Ballin Hecke e o Prof Dr. Roberto Dalledone Machado, pela coordenação durante a todo caminho percorrido que conduziu à elaboração desta Dissertação, assim como todo o trabalho que tiveram durante a orientação. Agradeço ainda o esforço desenvolvido na leitura e as sugestões de revisão que permitiram o enriquecimento do texto desta Tese.

Um agradecimento muito especial aos meus colegas da Bosch pelo excelente ambiente de trabalho e auxílio em minhas pesquisas e experimentos, dentre eles, José Masetto, Mario Bittencourt, Marcelo Schimomura, Joel Olcha, Walter Praseta, Rubens Avanzini e a todos os demais que de alguma forma se envolveram no processo.

Desejo agradecer também à Bosch, chefes, gerentes e diretores, pelo sustento fornecido à pesquisa e por possibilitar o meu desenvolvimento, assim como de outros colaboradores, através do aperfeiçoamento técnico adquirido nesse mestrado.

Por fim gostaria de agradecer, com muito carinho, à UFPR e ao CESEC pelo excelente trabalho como instituição de ensino e orientação de seus alunos, que muito contribuiu no meu crescimento técnico assim como no pessoal, através do contato com alunos e Professores dedicados e facilidades oferecidas.

“A mente que se abre a uma nova idéia,
jamais voltará ao seu tamanho original”

(Albert Einstein).

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	VIII
LISTA DE TABELAS.....	XI
LISTA DE SÍMBOLOS.....	XII
RESUMO	XIV
ABSTRACT	XV
1 INTRODUÇÃO.....	1
2 REFERÊNCIA HISTÓRICA	5
3 CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS	9
3.1 FADIGA	9
3.1.1 INTRODUÇÃO.....	9
3.1.2 FATORES QUE AFETAM A RESISTÊNCIA À FADIGA	10
3.2 INFLUÊNCIA DO GRADIENTE DE TENSÕES	12
3.2.1 INTRODUÇÃO.....	12
3.2.2 HASTES E BARRAS.....	14
3.2.3 APROXIMAÇÃO BASEADA EM TENSÃO	16
3.2.4 EFEITO DO ENTALHE	16
3.2.5 GRADIENTE DE TENSÕES.....	17
3.2.6 EFEITO DO ENTALHE NO LIMITE DE FADIGA	22
3.3 APROXIMAÇÃO DA ESCALA MESOSCÓPICA	25
3.3.1 INTRODUÇÃO.....	25
3.3.2 CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	26
3.3.2 CRITÉRIO BASEADO NA APROXIMAÇÃO DA ESCALA MESOSCÓPICA	27
4 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	37
4.1 INTRODUÇÃO	37
4.2 FORMULAÇÃO FORTE.....	38

4.3	FORMULAÇÃO FRACA OU VARIACIONAL	38
4.4	MÉTODO DE APROXIMAÇÃO DE GALERKIN	39
4.5	CARACTERIZAÇÃO DOS ELEMENTOS DE ACORDO COM O ABAQUS	41
4.6	ELEMENTOS TRIANGULARES, TETRAÉDRICOS E PRISMA	43
4.7	CONTATO ENTRE SUPERFÍCIES	44
4.7.1	INTRODUÇÃO	44
4.7.2	ESTABELECENDO O CONTATO	45
4.7.3	USANDO ELEMENTOS TRIDIMENSIONAIS DE SEGUNDA ORDEM	46
4.8	MALHA DE ELEMENTOS	47
5	APLICAÇÃO DO MODELO NO BICO INJETOR	48
5.1	INFORMAÇÕES TÉCNICAS	49
5.1.1	INTRODUÇÃO	49
5.1.2	MONTAGEM DO INJETOR	49
5.1.3	MODO DE OPERAÇÃO	51
5.1.4	APLICAÇÃO	51
5.2	MODELAGEM COMPUTACIONAL	52
5.2.1	MODELO DO BICO	52
5.2.2	MODELAGEM COM O ABAQUS	56
5.2.3	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO PARA AVALIAÇÃO DE FADIGA	61
5.3	MODELAGEM COMPUTACIONAL	65
5.3.1	DESCRIÇÃO DO DISPOSITIVO E MÁQUINA DE TESTE	65
5.4	RESULTADOS	69
5.4.1	RESULTADOS TEÓRICOS	69
5.4.2	RESULTADOS EXPERIMENTAIS	71
5.4.3	COMPARAÇÃO ENTRE RESULTADOS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS	73
6	CONCLUSÃO	77
	ANEXO A	78

REFERENCIAS	85
--------------------------	-----------

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - a) Casos de falha por fadiga na cúpula do Bico, b) Detalhe da falha da cúpula do Bico; c) Falha longitudinal no Bico.....	2
FIGURA 2 - Tensão local e tensão nominal nos casos: a) tração simples, b) flexão e c) tração de um corpo com entalhe.....	13
FIGURA 3 - Barra, haste com entalhe sujeita à torção, tração e flexão.	15
FIGURA 4 - Influência do raio da raiz do entalhe no fator de concentrações de tensões para torção e flexão.	15
FIGURA 5 - Influência do entalhe na amplitude de tensão aplicada para fadiga.....	17
FIGURA 6 - Efeito do gradiente de tensões em flexão e torção.....	18
FIGURA 7 - Gradiente de tensões em um entalhe.....	19
FIGURA 8 - K_f experimental e calculado.	20
FIGURA 9 - Fratura superficial de testes de torção (referência 26).	20
FIGURA 10 - Trinca superficial sujeita às carga de Modo I, Modo II e Modo III.....	21
FIGURA 11 - Barras lisas e entalhadas, sujeitas à tração.	22
FIGURA 12 – Alteração do fator de proporcionalidade com o gradiente de tensões relativo.....	24
FIGURA 13 - Curva de variação das tensões com o gradiente de tensões relativo.....	25
FIGURA 14 - Ilustração esquemática da independência do limite de fadiga em torção com respeito à tensão média	27
FIGURA 15 - Volume elementar V e plano material elementar Δ	29
FIGURA 16 - Distribuição dos vetores tensão no plano Δ do volume elementar V	30
FIGURA 17 - Definição da amplitude da tensão de cisalhamento resolvido e da amplitude da tensão de cisalhamento resolvido.....	30
FIGURA 18 - Ângulos de identificação do plano Δ num caso de torção e flexão, passando por um ponto 0 qualquer.....	31

FIGURA 19 - Diagrama do tipo de Haigh (PAPADOPOULOS ⁴) representando a influência de uma tensão estática normal no limite de fadiga em flexão. As duas linhas de Haigh mostradas correspondem aos limites do parâmetro α (i.e. $\alpha = 0$ e $\alpha = 2/3$).	36
FIGURA 20 - Tipos de elementos comumente utilizados, para análise de tensões.	42
FIGURA 21 - Elementos “brick” linear e quadrático.	43
FIGURA 22 - Elementos mestre isoparamétricos.	44
FIGURA 23 - Discretização do contato e interação.	45
FIGURA 24 - Penetração do nó mestre na superfície escrava.	46
FIGURA 25 - Cargas nodais devido à pressão constante em um elemento de face de segunda ordem.	46
FIGURA 26 - Princípio da injeção de combustível na câmara de combustão de um motor.	49
FIGURA 27 - Desenho esquemático de um Injetor padrão.	50
FIGURA 28 - Posição do Bico com orifício de injeção na Câmara de combustão.	52
FIGURA 29 - Modelo 3D do Corpo Injetor, com as condições de contorno e cargas.	53
FIGURA 30 – Malha do Bico e da Agulha utilizando elementos tetratédricos (3D) – C3D10M. a) Malha do Bico; b) Malha da Agulha.	54
FIGURA 31 - Distribuição de tensões devido ao aperto de montagem do Bico em Mpa.	55
FIGURA 32 - Distribuição de tensões devido à aplicação da pressão mínima em MPa.	55
FIGURA 33 - Distribuição de tensões devido à aplicação da carga máxima em MPa.	56
FIGURA 34 - Distribuição de S11 devido à aplicação da carga máxima em MPa.	58
FIGURA 35 - Distribuição de S22 devido à aplicação da carga máxima em MPa.	58
FIGURA 36 - Distribuição de S33 devido à aplicação da carga máxima em MPa.	59

FIGURA 37 - Distribuição de S12 devido à aplicação da carga máxima em MPa.	59
FIGURA 38 - Distribuição de S13 devido à aplicação da carga máxima em MPa.	60
FIGURA 39 - Distribuição de S23 devido à aplicação da carga máxima em MPa.	60
FIGURA 40 - Algoritmo para predição de fadiga.....	63
FIGURA 41 - Relação entre limite de fadiga e dureza.	65
FIGURA 42 - Dispositivo e Bico para montagem na máquina de testes.	66
FIGURA 43 - Ordem de montagem do Bico no dispositivo.	67
FIGURA 44 - Dispositivo montado, com o Bico, para testes.	67
FIGURA 45 - Máquina utilizada para os ensaios (Maximator).	68
FIGURA 46 - Montagem do dispositivo na Maximator.	69
FIGURA 47 - Peça que falhou por fadiga.	72
FIGURA 48 - Local de início de trinca.	74
FIGURA 49 - Local teórico de início de trinca.	75
FIGURA 50 - Local teórico de início de trinca.	76

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Resultados obtidos utilizando apenas o Critério da aproximação mesoscópica	71
Tabela 2: Resultados obtidos com o fator de gradiente de tensões no critério	71
Tabela 3: Teste de durabilidade em Bico Injetor, com variação da pressão máxima.	73

LISTA DE SÍMBOLOS

- σ - Tensão local.
- S - Tensão nominal.
- K_t - Fator de concentração de tensão elástica.
- M_T - Momento de flexão.
- M_i - Momento de flexão na direção i .
- τ - Cisalhamento.
- S^T - Tensão nominal devido à torção.
- S^F - Tensão nominal devido à flexão.
- K_f - Fator de fadiga do entalhe.
- σ_{ar} - Amplitude da tensão local de um ciclo completamente reversível.
- S_{ar} - Amplitude da tensão nominal de um ciclo completamente reversível.
- σ_F - Tensão do limite de fadiga de um corpo de prova sem entalhe.
- σ_{FE} - Tensão do limite de fadiga de um corpo de prova com entalhe.
- n - Fator de proporcionalidade.
- χ^* - Gradiente de tensões relativo.
- σ_a - Amplitude da tensão em um ciclo.
- σ_m - Tensão média em um ciclo.
- τ_a - Amplitude do cisalhamento em um ciclo.
- τ_m - Cisalhamento médio em um ciclo.
- γ^p - Deformação plástica intergranular.
- V - Volume elementar.
- Δ - Plano estudado contido no volume elementar.
- \mathbf{C} - Vetor tensão de cisalhamento em Δ .
- \mathbf{m} - Vetor unitário contido no plano Δ .
- \mathbf{T} - Vetor projeção de \mathbf{C} em \mathbf{m} .
- t_{-I} - Limite de fadiga de torção completamente reversível.

f_{-I} - Limite de fadiga de flexão completamente reversível.

S_{ij} - Tensão nominal na face i e na direção j.

RESUMO

O objetivo desse trabalho é a predição do limite de fadiga para materiais duros, sendo aplicado a peças ou componentes sujeitos a carregamentos cíclicos. Para isto, o Método dos Elementos Finitos é utilizado na análise de tensões, associado a um critério de fadiga baseado em uma abordagem da escala mesoscópica do material. O critério aqui utilizado, formulado por Ioannis V. Papadopoulos , foi adotado por seu bom resultado em predições com material duro. Esse critério trabalha no nível das deformações intergranulares do metal, analisando a soma das mesmas, para definir o início da trinca por fadiga.

Além do critério da escala mesoscópica utilizado, foi incorporada a influência do gradiente de tensões no limite de fadiga. Para isso foi desenvolvido um código computacional, implementado em FORTRAN, a fim de ler os dados de tensões obtidos por simulação e calcular se e onde a peça estudada falha. É importante salientar que esse estudo não tem como objetivo determinar quando ocorre a falha (número de ciclos).

Para validação do método de predição do limite de fadiga, os resultados teóricos obtidos foram confrontados com ensaios acelerados controlados. Estes ensaios provocam carregamentos cíclicos em peças, de forma a representar as cargas de maior influência durante o seu funcionamento em condições reais, nas situações de maior sollicitação mecânica.

ABSTRACT

The object of this work is the prediction of the fatigue life of hard material, applied to pieces and parts under cyclic load. To this, the Finite Element Method was used to stresses analysis, working together with a fatigue criteria based in a mesoscopic scale approach of the material. This criteria, formulated by Ioannis V. Papadopoulos, was adopted because of its good performance to hard materials. This criteria works with intergranular deformation of the metal, it adds their values to define the beginning of the fatigue crack.

Together with the mesoscopic criteria, it was considered the influence of the stress gradient to the fatigue. It was also developed a computational code, implemented in FORTRAN, to read the stresses data, coming from a simulation, and predict if the specimen failure and where it happens. It is important to say that the object of this work is not to find when the failure happens (cycles quantity).

To the validation of the fatigue limit prediction method, the theoretical results are compared with accelerated tests. These tests consists on apply cyclic loads over the sample, in a way of reproduce the more influent loads during the work life of the piece in real conditions, on situations of worst mechanical efforts.

1 INTRODUÇÃO

Durante muitos anos falhas mecânicas tem provocado prejuízos não só financeiros como também humanos. Grande percentagem dessas falhas mecânicas pode ser atribuída a carregamentos cíclicos que ocasionam fadiga.

Os primeiros maiores impactos de falhas devidos a tensões repetitivas relacionam-se a indústria ferroviária dos anos de 1840. O mais famoso acidente ocorreu em 1842 em Versailles vitimando sessenta pessoas. Na época foi reconhecido que os trilhos falhavam com regularidade nos dormentes.

Falhas devidas à fadiga continuaram acontecendo. Após a 2^a guerra diversos acidentes aéreos reforçaram a necessidade da indústria aeronáutica de estudar esse fenômeno ainda tão pouco conhecido. FUCHS ² relata o seguinte caso: O primeiro jato a propulsão para passageiros, o Comet, começou seus serviços em maio de 1952 após mais de 300 horas de testes de vôo. Quatro dias após uma inspeção em janeiro de 1954, ele caiu no mar do Mediterrâneo. Após muitos testes e exaustiva investigação, concluiu-se que o acidente foi causado por falha de fadiga da cabine pressurizada.

Estes casos registrados na história, assim como muitos outros não comentados aqui, mostraram a necessidade de se estudar mais o fenômeno da fadiga, que ainda hoje precisa ser melhor compreendido.

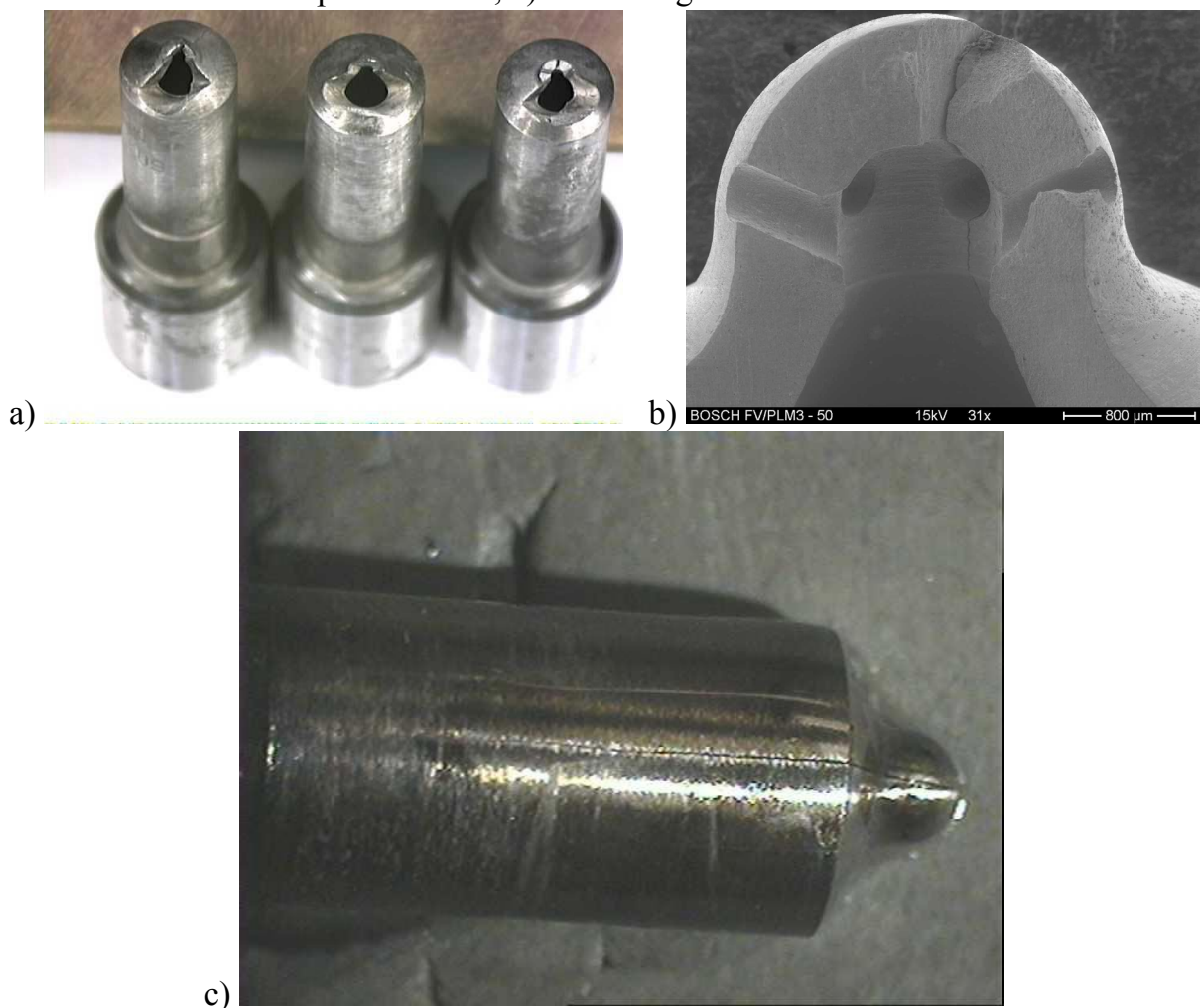
A indústria automobilística também investe muito na prevenção da fadiga, devido às solicitações de peças e componentes em regime cíclico. Dessas peças com alta solicitação de cargas, pode-se citar os Sistemas Injetores Diesel, que vêm se desenvolvendo continuamente, acompanhando o crescimento tecnológico no ramo automobilístico. Seus projetos abrangem geometrias mais complexas e aplicação de valores de pressão cada vez maiores, a fim de injetar o combustível no motor de forma compatível com as exigências dos sistemas.

Devido às altas variações de pressões ocorridas nos Injetores e especialmente no Bico, estes componentes tornam-se alvo de muitos cuidados quanto à sua

durabilidade, demandando vários ensaios de pulsação hidráulica durante o seu desenvolvimento, de forma a garantir que o produto possa resistir ao tempo de vida útil do Sistema Injetor.

Esses ensaios, também conhecidos como “ensaios acelerados”, por acelerar em poucos dias o comportamento que o produto teria depois de anos de operação, levam bastante tempo para sua conclusão, devido à necessidade de vários componentes serem testados para garantir uma confiabilidade estatística do resultado. A figura 1 apresenta peças que fadigaram após ensaios realizados em Bicos Injetores. Pode-se observar rupturas provocadas pelas cargas cíclicas, as falhas por fadiga.

FIGURA 1 - a) Casos de falha por fadiga na cúpula do Bico, b) Detalhe da falha da cúpula do Bico; c) Falha longitudinal no Bico.



O Bico foi escolhido como objeto de estudo desse trabalho, por ser o componente do Injetor de maior solicitação e que mais está sujeito à quebra, consumindo muito tempo em testes para seu desenvolvimento e provocando um alto custo do projeto.

Entretanto, por meio de simulações computacionais e análises numéricas, é possível reduzir o tempo e o custo do projeto, incorporando no modelo o comportamento dinâmico repetitivo aos quais as peças estão sujeitas durante os ensaios.

O objetivo deste trabalho é propor um modelo para predição de fadiga em metais duros, evitando a formação de trincas, e que possa ser aplicado em um caso real.

Através da análise via Método dos Elementos Finitos podem se obter os valores das tensões e deslocamentos em diferentes situações do ciclo, os quais, juntamente com propriedades conhecidas do material, são utilizadas em um critério de predição, que indicará se a peça sobreviverá ao considerado “limite infinito de fadiga” (10^7 ciclos), ou se irá falhar antes disto. Isto indicará se essa aplicação pode ser considerada viável quanto à sobrevivência durante a sua vida útil.

No próximo capítulo serão abordados os fatos históricos que marcaram a evolução do estudo de fadiga, assim como a situação em que a modelagem matemática de fadiga se encontra no contexto atual.

No capítulo 3 são abordadas considerações teóricas, onde se discorre sobre conceitos básicos em fadiga. É introduzida a influência do gradiente de tensões e o critério de predição utilizado, baseado na escala mesoscópica.

No capítulo 4 são apresentadas noções sobre o Método dos Elementos Finitos, onde são abordados aspectos utilizados para o modelo desse trabalho.

No capítulo 5 são apresentadas informações técnicas sobre o produto utilizado como objeto de validação do método empregado. Também é apresentada a metodologia de solução do problema, onde é abordado o algoritmo numérico, com seu

detalhamento matemático presente no Apêndice A, de um programa desenvolvido em FORTAN para esse fim. Em seguida, são dispostos os resultados teórico e experimental encontrados.

Na conclusão é avaliada a confiabilidade do modelo desenvolvido, através da comparação com os resultados práticos obtidos, e são feitas considerações a respeito do modelo e dos valores encontrados.

2 REFERÊNCIA HISTÓRICA

FUCHS e STEPHENS² descrevem em seu livro um breve histórico sobre os estudos de fadiga, que é reapresentado a seguir.

A palavra fadiga foi introduzida nos anos de 1840 e 1850 para descrever falhas que ocorrem por esforços repetitivos, e tem sido utilizada continuamente como referência para estes tipos de falha.

Nos anos de 1850 a 1860 August Wöhler, na Alemanha, executou diversos testes em laboratório utilizando esforços repetitivos. Esses experimentos foram motivados por falhas ocorridas em trilhos de trem, sendo esses testes considerados como a primeira investigação sobre fadiga. Desde então Wöhler tem sido chamado de “pai” do teste sistemático de fadiga. Ele mostrou, com diagramas de tensões por vida (S-N), como a vida de fadiga diminui com o aumento das amplitudes de tensão e que, sob uma certa amplitude de tensão, o corpo de prova não fratura. Desta forma, Wöhler introduziu o conceito do diagrama S-N e do limite de fadiga.

Durante os anos de 1870 e 1890, pesquisadores ampliaram o conceito de Wöhler. Gerber, entre outros, investigaram a influência da tensão média e Goodman propôs uma teoria simplificada a respeito das tensões médias.

Nos anos de 1900, o microscópico óptico foi utilizado com o propósito de estudar os mecanismos da fadiga. Foram encontradas linhas e faixas de deslizamento que levaram à formação de micro trincas. Em torno de 1920 Gough juntamente com outros pesquisadores, contribuíram, sobre maneira, ao entendimento dos mecanismos de fadiga. Eles também mostraram os efeitos combinados da flexão e torção (fadiga multiaxial).

Em 1920 Griffith publicou os resultados de seu cálculo teórico e experimentos em fratura frágil, utilizando vidro. Ele descobriu que a resistência do vidro depende do tamanho de trincas microscópicas. Se S é a tensão nominal na fratura e a é o tamanho da trinca, a relação $S\sqrt{a}$ é constante. Com este trabalho pioneiro na

importância das trincas, Griffith se tornou o “pai” da Mecânica da Fratura.

Em 1929 a 1930, Haigh apresentou sua explicação racional da diferença entre a resposta de aço de alta resistência à tração e aço mole, com relação à fadiga quando há entalhes. Durante os anos de 1930 métodos como jateamento (“shot-peening”), e outros que provocam tensões compressivas, foram utilizados como forma de beneficiamento para evitar a fadiga.

Em 1937 Neuber introduziu os efeitos do gradiente de tensões nos nós e o conceito de volume elementar, que considera que a tensão média em um volume pequeno na raiz de um entalhe é mais importante que o “pico” de tensão no entalhe.

Continuaram acontecendo desenvolvimentos de teorias sobre fadiga. CRUZ³ cita em seu trabalho a publicação de Crossland, na década de cinquenta, como base para diversos critérios desenvolvidos aplicando a abordagem mesoscópica.

Da mesma forma outros critérios com diferentes abordagens foram surgindo, incluindo a fadiga multiaxial, os quais podem ser divididos em três grupos principais: critérios de plano crítico, critérios em invariantes de tensão e critérios de energia de deformação.

Nos critérios do plano crítico, busca-se encontrar um plano, considerado crítico, pertencente a um volume elementar, onde a trinca por fadiga deve começar, utilizando como principais componentes a tensão normal e a de cisalhamento atuando em um plano material. Nos critérios baseados em tensões invariantes, é utilizado o segundo invariante do tensor desviador de tensão e a pressão hidrostática para avaliação do critério. Nos critérios de energia de deformação, utiliza-se o somatório da energia de histerese em cada ciclo, onde o material fadiga após ter acumulado uma quantidade crítica de energia.

PAPADOPOULOS⁴ cita em seu trabalho a contribuição de diversos pesquisadores nestas linha de atuação, como Mc DIARMID^{5, 6} com seu trabalho no critério do plano crítico e MARIN⁷ e CROSSLAND⁸ com suas propostas em tesões invariantes.

Mais inovações foram surgindo a partir desses critérios iniciais. Em plano crítico, DE-GUANG e DE-JUN ⁹, em 1998, publicam um critério cujo parâmetro considerado é uma deformação equivalente, resultante da aplicação das deformações normais e por cisalhamento no critério de Von Misses. Nos critérios baseados em energia, em 1985, KLIMAN ¹⁰ propôs um modelo para estimar a vida de fadiga com carregamento aleatório, utilizando uma aproximação probabilística. MACHA et al ¹¹ apresentou uma revisão dos critérios para fadiga multiaxial baseados em energia. Posteriores trabalhos como os de ŁAGODA et al ¹², FARAHANI ¹³, PARK e NELSON ¹⁴ e LEE et al ¹⁵, buscaram a utilização do conceito de energia no critério do plano crítico.

Em 1994, PAPADOPOULOS ^{16, 17} propôs um critério onde era abordado o comportamento intergranular (microscópico) dos materiais, publicando em 1995 sua aplicação para tubos de paredes finas. Em 1997, PAPADOPOULOS ⁴ publicou um trabalho comparativo sobre critérios de fadiga multiaxiais, onde apresentou o seu critério baseado na escala mesoscópica, o qual é encontrado em seu trabalho na referência 1.

Outros trabalhos também foram apresentados abordando a escala mesoscópica, em 1996, PAPADOPOULOS e PANOSKALTSIS ¹⁸ publicaram a utilização desse método utilizando a influência do gradiente de tensões. MOREL ¹⁹, em 1998, utilizou esse critério para aplicações com carregamento multiaxial de amplitude constante e, em 2001, MOREL et al ²⁰ publicaram estudo comparativo entre as aproximações mesoscópica e energética. CRUZ e ZOUAIN ²¹, em 2003, introduziram variáveis internas no modelo teórico, de forma a representar as alterações do material no nível da escala mesoscópica. Em 2003 TORRES et al ²² publicou um trabalho onde apenas o critério de Papadopoulos foi utilizado em um produto industrial, com validação experimental, abordando a situação mais crítica obtendo valores mínimos de limite de torção e flexão na aproximação dos valores das propriedades do material quando feito tratamento superficial.

A utilização da escala mesoscópica no critério de predição de fadiga permite a independência com a diferença de fase entre tensões normais e de cisalhamento, assim como com a forma do carregamento (senoidal, triangular, quadrada, ...), o que é bem útil em aplicações onde estes fatores não são conhecidos.

3 CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

3.1 FADIGA

3.1.1 Introdução

Uma causa comum de fratura é a provocada pela fadiga, tipo de falha devida a cargas repetidas, e que é responsável por noventa por cento, ou mais, das falhas por causas mecânicas (CRUZ ³). Em geral, uma ou mais trincas pequenas surgem no material, podendo crescer até que ocorra falha completa.

Componentes de máquinas, veículos e estruturas, são freqüentemente sujeitos a carregamentos repetidos, também chamados de carregamentos cíclicos, e as tensões cíclicas resultantes podem levar a danos físicos microscópicos nos materiais envolvidos. Mesmo em tensões bem abaixo de uma dada resistência do material, os danos microscópicos podem ser acumulados com ciclo contínuo até seu desenvolvimento em uma trinca ou outro dano macroscópico que leva à falha do componente. Este processo de dano e falha devido ao processo cíclico é denominado fadiga (DOWLING ²³).

O comportamento de um material que está submetido à fadiga pode ser visto de forma simplificada através de duas fases predominantes: 1º Iniciação da trinca; 2º Propagação da trinca ou crescimento subcrítico da trinca. Essas fases podem ocorrer separadamente ou simultaneamente, conforme a aplicação de cargas, o material utilizado e a formação geométrica da peça ou componente envolvido.

Se o número de repetições (ciclos) do carregamento for grande, da ordem de milhões, então a situação é dita fadiga de alto ciclo. Por outro lado, fadiga de baixo ciclo é causada por um número relativamente pequeno de ciclos, cerca de dezenas, centenas, ou milhares. Fadiga de baixo ciclo é geralmente acompanhada por uma

quantidade significativa de deformação plástica, enquanto que fadiga de alto ciclo é associada às deformações relativamente pequenas que são essencialmente elásticas.

Prever essas situações que provocam falha de componentes e produtos tornou-se muito importante para o conhecimento da durabilidade da peça. Uma forma de se obter o conhecimento do comportamento da peça é através dos ensaios de durabilidade. Esses ensaios consistem em representar as principais cargas de trabalho que atuam no produto em ensaios repetitivos de alta velocidade, onde se analisa se ocorre ou não falha após um determinado número de repetições. Esse tipo de avaliação é muito comum e bastante confiável. Entretanto, em geral, também é bastante caro, devido ao custo de utilização da hora-máquina que efetua o ensaio e por destruição de várias amostras até se conseguir a curva de fadiga do produto, que indicará qual é a sua carga limite.

3.12 Fatores que afetam a resistência à fadiga

Tem sido muito importante no decorrer da história, encontrar quais são os fatores mais significativos que influem no comportamento dos materiais quanto à fadiga, OLIVEIRA ²⁴. Dessa forma, analisando-se aplicações com cargas cíclicas, pode-se observar os seguintes fatores de maior influência.

- Geometria:

Pode provocar concentrações de tensões, elevando tensões locais a níveis extremamente altas e gerando gradientes de tensões.

- Carregamento:

A variação da carga atuante é um fator complexo para se avaliar quando se trata do limite de fadiga de um componente. Nesses casos, para se estudar a fadiga, é necessário conhecer, da melhor forma possível, as cargas que estão atuando no objeto de estudo, o que pode ser feito através de instrumentações, “strain-gage”, células de

carga, sensores de pressão, etc. Uma vez obtido o máximo de informações sobre o caso, deve-se, então, utilizar métodos para verificar quais, dentre todas as atuações sobre a peça, seriam as cargas a serem levadas em consideração. Para isto um método bastante utilizado é o “rainflow” onde se procura encontrar e separar o máximo de ciclos de cargas existentes no mapa de cargas feito, bem como determinar sua frequência de atuação.

Devido ao estudo feito, na sequência podem-se desenvolver testes em laboratório, que atuem sobre a peça com a mesma influência que os carregamentos dos casos reais. Esses testes são conhecidos como testes acelerados.

- Fabricação:

Os processos de fabricação podem provocar aparecimento de falhas nas superfícies das peças, assim como alterar, erroneamente, a geometria das mesmas, causando concentrações de tensões e provocando o aparecimento de tensões residuais inconvenientes. Da mesma forma, um manuseio menos cuidadoso com a peça, durante o seu processo de produção, pode provocar trincas ou micro trincas, diminuindo a sua vida útil.

A matéria prima utilizada pode ser responsável por oclusões intergranulares que podem provocar o surgimento de trincas e facilitar a sua progressão.

- Tratamento de Pós-Fabricação

Estes tratamentos são utilizados no sentido de conferir à peça, propriedades que garantam o seu funcionamento correto e o tempo de vida útil planejado, propriedades essas que a peça originalmente não possuía. Os tratamentos superficiais aumentam a resistência à fadiga, através do endurecimento superficial podendo ser (FAIRES ²⁵): cementação, têmpera, nitretação, trabalho a frio por rolamento ou jateamento (“shot peening”), ...

- Meio

A ação de um meio agressivo, corrosivo, à peça, combinado com o fato do material estar sujeito à tensões de tração na sua superfície de contato, pode gerar um fenômeno conhecido como Corrosão Sob Tensão (CST), conforme CELTLIN e SILVA ²⁶, onde diz: “A corrosão sob tensão (CST) é um processo destrutivo por trincamento de um metal ou liga, resultante da ação simultânea de um meio agressivo (em que o mesmo se encontre) e de tensões de tração estáticas, residuais ou devidas a esforços externos, atuando em sua superfície.”.

3.2 INFLUÊNCIA DO GRADIENTE DE TENSÕES

3.2.1 Introdução

Conforme descrito por DOWLING ²³, é importante se distinguir entre a tensão em um ponto (local), σ , e a tensão nominal, S , em um dado volume estudado, por esta razão são utilizados dois símbolos diferentes. A tensão nominal S é calculada devido às cargas, momentos, ou suas combinações de maneira conveniente e é somente igual à σ em certas situações. Sejam os três casos da figura 2. Para o carregamento axial simples (a), a tensão local σ é a mesma em qualquer lugar e então é igual ao valor da tensão nominal $S=P/A$, onde A é a área da seção reta do espécime.

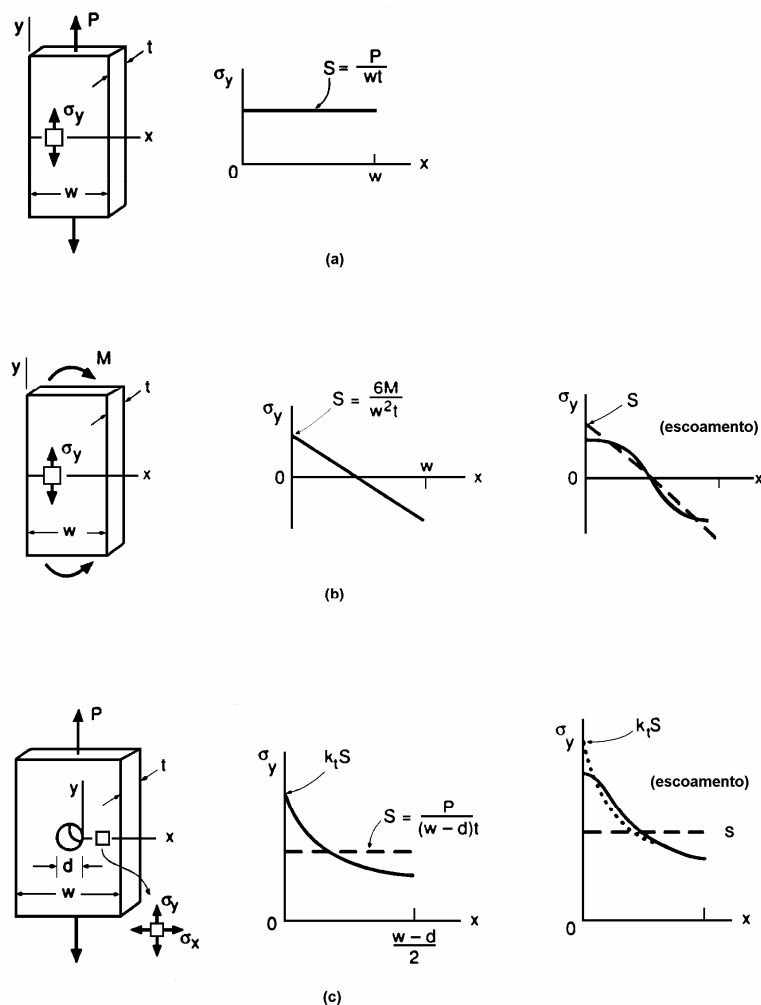
Para flexão, tem-se que $S = Mc/I$, onde c é a distância do eixo neutro à aresta e I é o momento de inércia da área sobre o eixo de flexão. Na aresta do espécime flexionado, tem-se que $\sigma = S$, com o valor de σ menor em qualquer outro ponto da curva, como pode ser visto na figura 2 (b). Entretanto se ocorrer escoamento, a distribuição de tensões deixará de ser linear e σ ficará diferente de S , na aresta, como pode-se ver na figura 2 (b).

Para espécimes entalhados, a tensão nominal S é convencionalmente calculada pela área da seção remanescente à do entalhe. No caso do carregamento

axial, utiliza-se $S = P/A$, e para flexão, $S = Mc/I$, que é calculado baseado na área de flexão da seção furada. Entretanto para espécimes entalhados, devido ao efeito de amplificação da tensão, a tensão S precisa ser multiplicada por um fator de concentração de tensão elástica, K_t , para obter-se o pico de tensão no entalhe, $\sigma = K_t S$, como ilustrado na figura 2(c).

Na figura 2, as distribuições de tensões local $\sigma_y \times x$ são mostradas como linhas sólidas, distribuições associadas com tensões nominais S , como linhas tracejadas. Em (c) a distribuição de tensões que poderia ocorrer se não houvesse escoamento é mostrado como uma linha pontilhada.

FIGURA 2 - Tensão local e tensão nominal nos casos: a) tração simples, b) flexão e c) tração de um corpo com entalhe.



Na análise de falha por fadiga em peças com entalhes, TAYLOR e WANG²⁷ preocupou-se em validar alguns métodos de análise. Um deles é o Método Região de Processo, onde o problema da fadiga deve ser analisado não somente no ponto de maior concentração de tensões, mas sim em regiões próximas ao entalhe, denominadas volume crítico. Assim como o método de Smith e Miller onde as trincas são analisadas como sendo um caso limite de um entalhe bem afiado.

Neste trabalho, um dos objetivos é estudar a influência que as tensões provocadas por entalhes têm nos limites de fadiga. Com isto preocupa-se em investigar a influência dos concentradores de tensões, assim como dos gradientes de tensões.

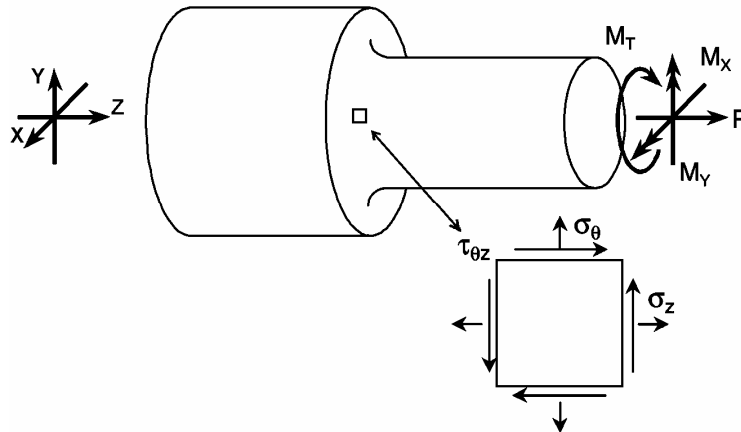
A concentração de tensões não pode ser evitada no projeto de estruturas e em componentes de engenharia onde os entalhes estão presentes. Fatores de concentração de tensões, K_t , freqüentemente são utilizados para caracterizar o comportamento de fadiga do entalhe. O tamanho, forma, tensão e gradiente de tensão, e até mesmo os carregamentos aplicados e suas fases, todos possuem um papel na nucleação e crescimento de trincas de fadiga. A deformação plástica redistribui algumas das tensões e também pode resultar na presença dos efeitos da tensão média.

3.2.2 Hastes e barras

Um exemplo de uma haste entalhada, dado na figura 3, mostra como se comportam as tensões no entalhe. Quatro carregamentos independentes podem ser aplicados a este tipo de geometria: tração P , torção M_T , e dois momentos de flexão M_x e M_y . As tensões máximas devidas ao carregamento de tração e torção são localizadas em um anel anular na base da concentração de tensão. A localização da flexão máxima depende da magnitude e fase dos dois momentos de flexão M_x e M_y . Carregamentos de flexão e tração irão produzir uma tensão σ_z . Uma tensão σ_θ também irá ser produzida devido à restrição do entalhe. Momentos de torção resultam em uma tensão de cisalhamento $\tau_{\theta z}$. O cisalhamento e a tensão normal serão combinados em carregamentos de tração e torção, e a direção da tensão principal resultante não ficará

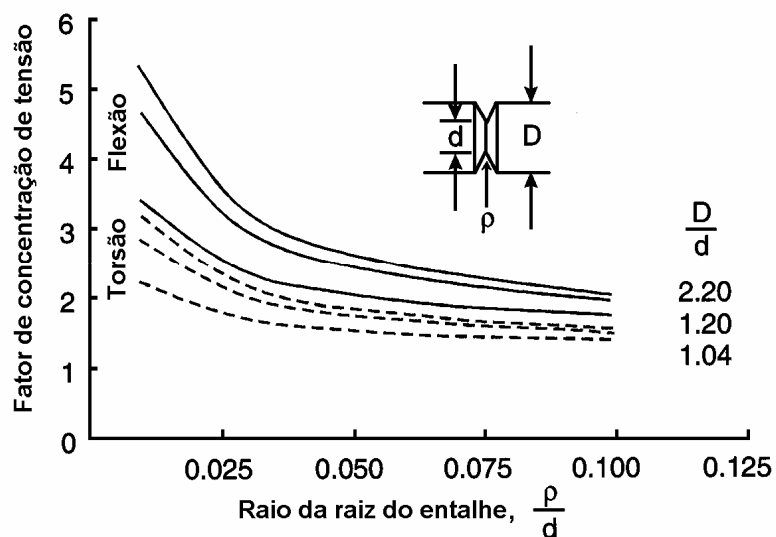
no plano do entalhe. Tensões devido a tração e torção serão constantes ao redor da circunferência da haste. Tensões de flexão terão um máximo em somente um local.

FIGURA 3 - Barra, haste com entalhe sujeita à torção, tração e flexão.



Concentrações de tensões são funções da razão dos diâmetros e dos raios dos entalhes. Para a mesma geometria, concentrações de tensões são menores em torção que em tração ou flexão, como mostrado na figura 4. Fatores de concentração de tensões para três razões de diâmetros, D/d , são dados na figura 4, tanto por tração quanto por torção.

FIGURA 4 - Influência do raio da raiz do entalhe no fator de concentrações de tensões para torção e flexão.



3.2.3 Aproximação baseada em tensão

A superposição linear pode ser utilizada para obter estimativas de tensões de entalhes e deformações no regime elástico. Conforme SOCIE ²⁸, Gough conduziu um extensivo programa de testes de hastes entalhadas em carregamento combinado de flexão e torção. Na ausência da tensão média, uma tensão equivalente pode ser computada das tensões nominais S^T e S^F e comparado com o limite de fadiga b . Os fatores de concentração de tensão em flexão e torção são denotados por K_t^F e K_t^T . Esta aproximação é essencialmente a mesma que computar a tensão equivalente de Von Mises na base do entalhe para um estado de tensões de duas dimensões.

$$b = \sqrt{(K_t^F S^F)^2 + 3(K_t^T S^T)^2} \quad (3.01)$$

Na medida que o raio do entalhe se torna menor, este critério torna-se mais conservativo. Isto é esperado e é diretamente relacionado a observações empíricas de que K_f (fator de fadiga do entalhe, que será visto adiante) é menor que K_t devido ao tamanho do entalhe e efeito do gradiente de tensões.

3.2.4 Efeito do entalhe

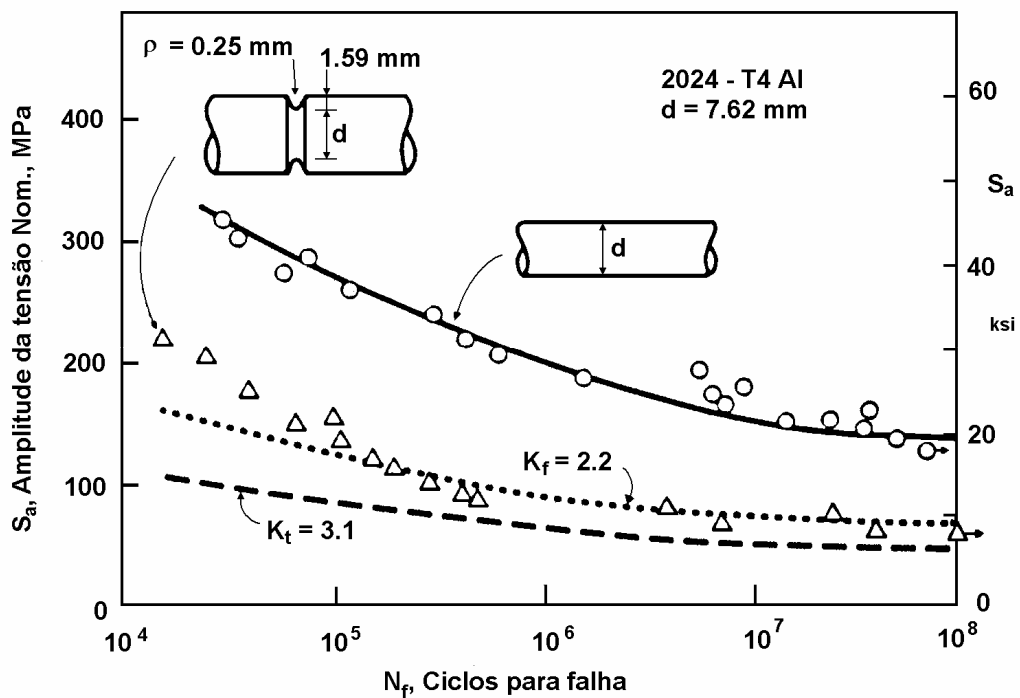
O fator elástico de concentração de tensões K_t pode ser empregado para caracterizar a severidade de um entalhe. Em uma visão simplista, pode-se esperar que uma peça com entalhe e sem entalhe (contínua) tenham a mesma vida de fadiga, se a tensão $\sigma = S$ na peça contínua é a mesma que a tensão $\sigma = K_t S$ na peça com entalhe. Entretanto, conforme visto em DOWLING ²³, em um gráfico S pela vida N_f , o efeito de um entalhe deveria ser reduzir a amplitude de tensão correspondente a qualquer vida dada pelo fator K_t . Um exemplo desta estimativa é a linha inferior na Figura 5. Entretanto, parece que dados de teste reais permanecem acima desta estimativa, de forma que o entalhe tem menos efeito que a estimativa baseada no K_t . O fator de

redução real ao longo das vidas por fadiga, especialmente em $N_f = 10^6$ a 10^7 ciclos, ou maior, é chamado de *fator de fadiga do entalhe* e é denotado K_f .

$$K_f = \frac{\sigma_{ar}}{S_{ar}} \quad (3.02)$$

onde K_f é formalmente definido somente para tensões completamente reversíveis, σ_{ar} é amplitude de tensão local de um ciclo completamente reversível, equivalente ao ciclo de cargas real da peça contínua, e S_{ar} é a amplitude da tensão nominal de um ciclo, completamente reversível, equivalente ao ciclo de cargas real da peça com entalhe.

FIGURA 5 - Influência do entalhe na amplitude de tensão aplicada para fadiga.



3.2.5 Gradiente de tensões

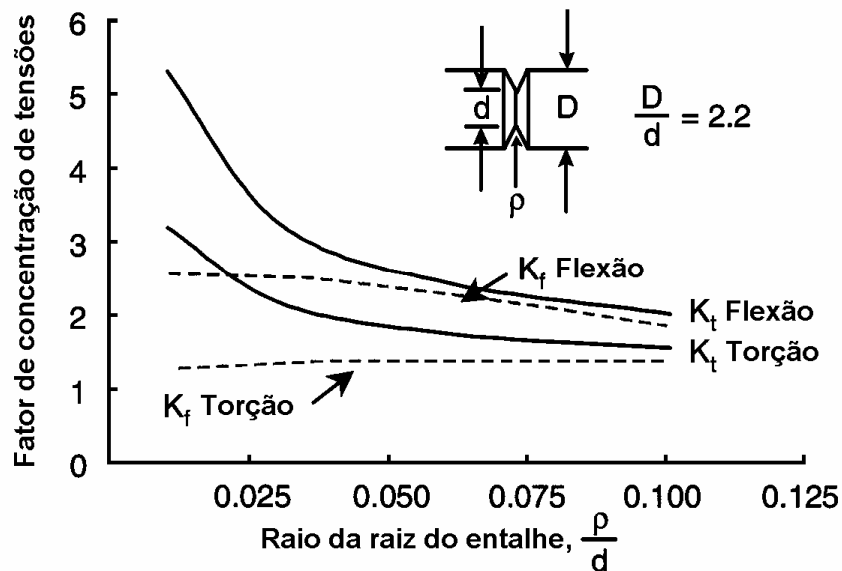
Conforme SOCIE e MARQUIS²⁸, gradiente de tensões e efeitos de tamanho (“size effect”) por entalhe em carregamento uniaxial são bem documentados e têm levado à relações empíricas, tais como aquelas propostas por Peterson relacionando K_f

ao raio do entalhe e uma constante do material designada por a .

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \frac{a}{r}} \quad (3.03)$$

Segundo experimentos com barras de 22 mm relatados por SOCIE e MARQUIS²⁸, onde testes de longa vida de flexão e torção foram executados nestas barras, as quais possuíam entalhes circunferenciais de vários valores de raio, verificou-se que a concentração de tensão por torção é menor que a concentração de tensão por flexão, assim como a razão K_f/K_t , tanto para flexão como para torção, mudam de acordo com diferentes taxas ρ/d , como pode ser visto na figura 6. Este dado mostra a necessidade de se introduzir o efeito do gradiente de tensões na equação 3.01 para carregamento multiaxial. Foram cortados os espécimes utilizados nestes testes e encontraram trincas não propagadas na maioria dos casos.

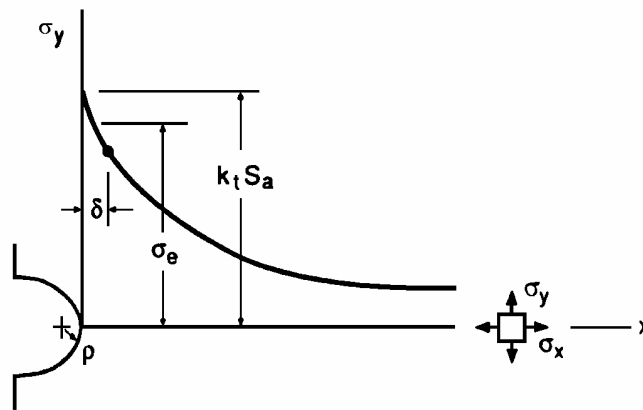
FIGURA 6 - Efeito do gradiente de tensões em flexão e torção.



Um argumento baseado nos gradientes de tensão é que o material não é sensível ao pico de tensão, mas sim à média das tensões que agem sobre uma região de tamanho pequeno, porém, finito. Em outras palavras, alguns volumes finitos do material devem ser envolvidos pelo processo de dano por fadiga para acontecerem. O

tamanho da região ativa pode ser caracterizada por uma dimensão δ , chamada de tamanho da região de processo, como ilustrado na figura 7. Assim a tensão que controla a iniciação do dano por fadiga não é a tensão mais alta em $x = 0$, mas sim alguma outra de valor menor que é a média das tensões até uma distância $x = \delta$. Esta média de tensão é, então, esperada que seja a mesma que o limite de fadiga para uma peça contínua σ_e , tal que K_f é estimado por:

FIGURA 7 - Gradiente de tensões em um entalhe.

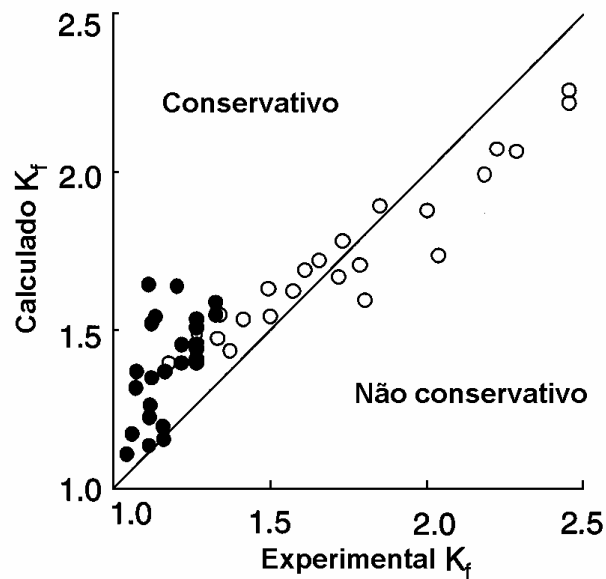


$$K_f = \frac{(\text{média de } \sigma_a \text{ até } x = \delta)}{S_a} = \frac{\sigma_e}{S_a} \quad (3.04)$$

que é menor que K_t ,

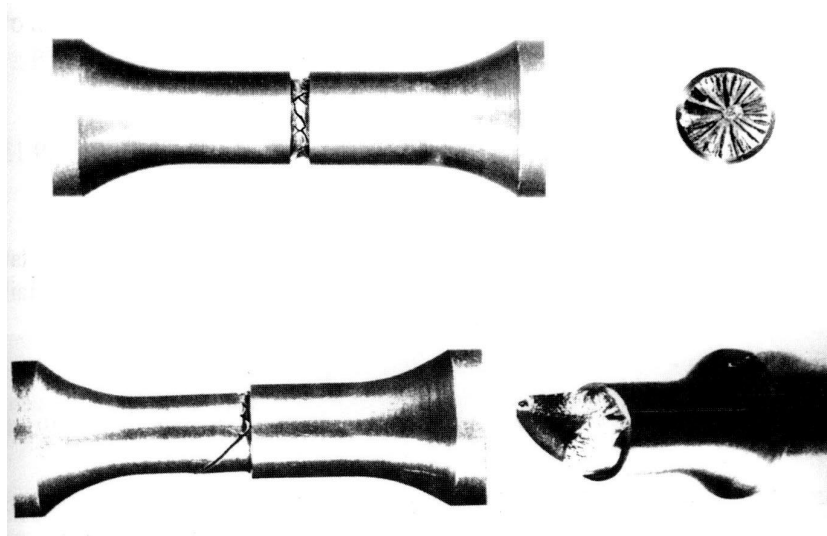
A figura 8 mostra valores de K_f determinados experimentalmente e calculados pela equação 3.03 para todos os dados relatados nos experimentos já mencionados com barras de 22 mm. Estes testes foram conduzidos em aço 1035 com uma resistência à tração de aproximadamente 600 Mpa. Os símbolos sólidos denotam dados da torção. A constante do material na equação de Peterson foi estimada como sendo $a = 0.24$ mm, e o raio do entalhe para estes testes ficou entre 0.1 e 3 mm. A aplicação da equação de Peterson superestima K_f para todos os tipos de torção. Carregamento de torção é menos danoso que tração em uma barra entalhada circunferencialmente. Entretanto, para um furo em uma lâmina ou placa, a torção produz um grande K_t , o que pode ser mais danoso que a tração.

FIGURA 8 - K_f experimental e calculado.



Para carregamento de torção, a tensão principal máxima não fica no plano do entalhe. Trincas espirais se formam no limite de fadiga de torção em um entalhe circunferencial ou rebaixo. Fraturas superficiais dos dois espécimes são mostradas na figura 9 para um teste de vida longa em um nível de tensão ligeiramente abaixo do limite de fadiga.

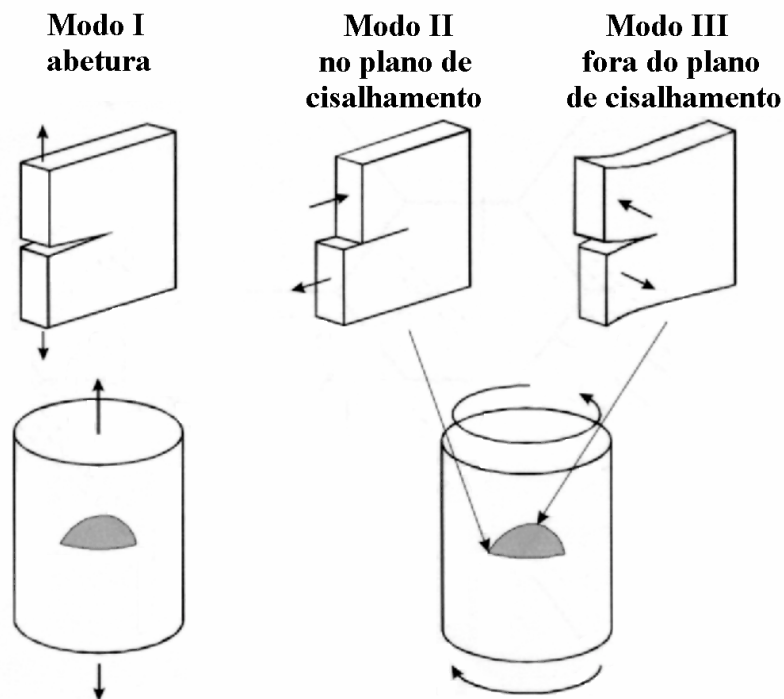
FIGURA 9 - Fratura superficial de testes de torção (referência 28).



O diâmetro destes espécimes é 10 mm, e a profundidade do entalhe é 1 mm para ambos os entalhes. Na barra com entalhe circunferencial, as trincas são

confinadas ao plano do entalhe. Para se propagar para fora do entalhe, as trincas precisam crescer lateralmente ao entalhe, para dentro de uma região de tensão menor. Isto resultará em um valor menor de K_f para esta geometria. Após a nucleação, as trincas ficam livres para crescer para dentro da porção sem o entalhe do espécime rebaixado. Na figura 9 nota-se a fratura em espiral no espécime rebaixado. Para o mesmo K_f , o espécime rebaixado tem um limite de fadiga menor por causa das trincas não serem restringidas ao plano do entalhe. A forma do entalhe muda o crescimento da trinca para modo III (carga aplicada para fora do plano de cisalhamento) na barra entalhada circunferencialmente e para Modo I (carga aplicada para abertura da trinca) no espécime rebaixado, a figura 10 mostra uma representação dos modos de falha. Estes dados sugerem a necessidade de considerar gradientes de tensão ao longo do potencial caminho da trinca.

FIGURA 10 - Trinca superficial sujeita às carga de Modo I, Modo II e Modo III.



Neste estudo não será abordado o gradiente de tensões de torção devido à natureza das cargas aplicadas ao Bico Injetor, foco do presente trabalho.

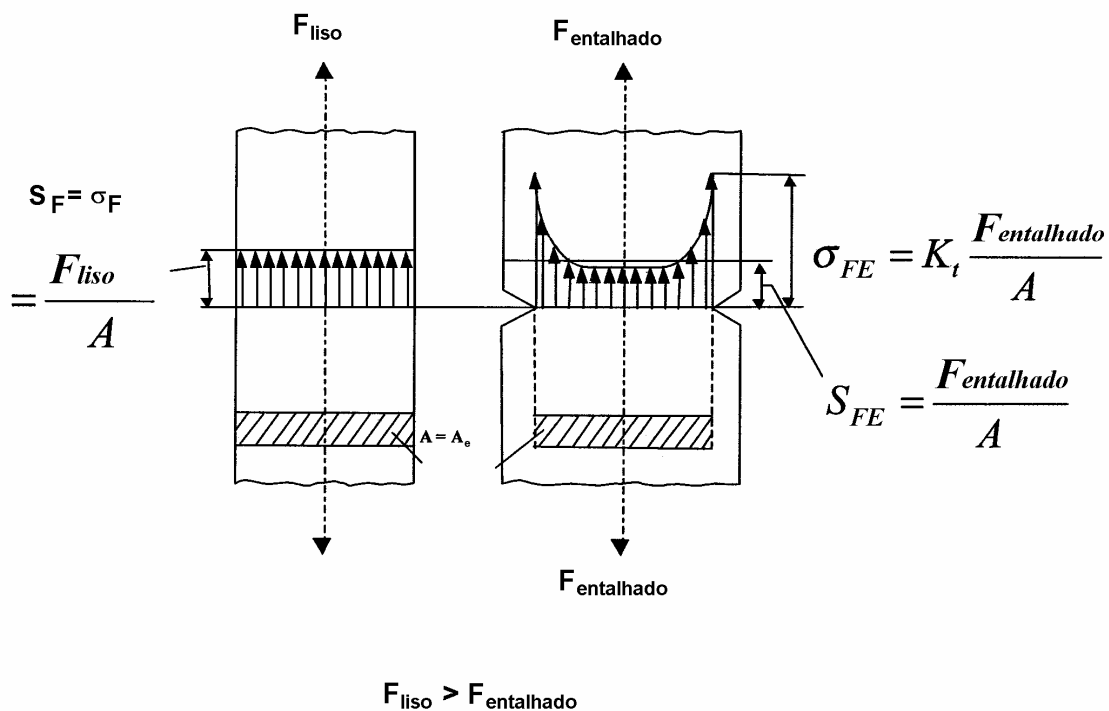
3.2.6 Efeito do entalhe no limite de fadiga

O limite de fadiga para um espécime sem entalhe é menor que o limite de fadiga na raiz do entalhe de um espécime entalhado. A figura 11 ilustra a representação de dois corpos, sem e com entalhe, sujeitos às suas respectivas tensões limites de fadiga, σ_F e σ_{FE} . Esta relação entre as tensões limites de fadiga pode ser representada matematicamente pela seguinte inequação:

$$\sigma_F < \sigma_{FE} \quad (3.05)$$

Da mesma forma, para espécimes mantendo a mesma área mínima, a força necessária para fadiga de espécimes sem entalhe é maior que a força para espécimes com entalhe, conforme indicado na figura 11.

FIGURA 11 - Barras lisas e entalhadas, sujeitas à tração.



Pode-se, então, reescrever a relação (equação 3.05) do limite de fadiga local através do fator de proporcionalidade n :

$$\sigma_{FE} = n \sigma_F \quad (3.06)$$

Neste ponto faz-se necessário definir o gradiente de tensões relativo, χ^* . Esta variável tem seu valor definido pela divisão do gradiente de tensões e a tensão local máxima. Observando a figura 11, pode-se escrever sua representação como:

$$\chi^* = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot \frac{1}{\sigma_{FE}} \quad (3.07)$$

ou, de forma generalizada,

$$\chi^* = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot \frac{1}{\sigma_{máx}} \quad (3.08)$$

onde x é o eixo perpendicular à ação da força no corpo e $\sigma_{máx}$ é a tensão local máxima.

FUCHS ² relaciona este parâmetro com a fadiga do material e afirma que não se pode prever, com precisão, o comportamento de peças com entalhes, aplicando o fator de concentração de tensões aos valores obtidos em peças lisas.

O uso do fator de proporcionalidade limita-se não somente corpos de prova com entalhe, mas pode também se transferir para peças com geometrias diversas, onde ocorram carregamentos com gradientes de tensão tanto de flexão como de torção.

Conforme indicado por LINKEWITZ ²⁹, uma formulação padrão utilizada para o fator de proporcionalidade indica como sendo uma função do gradiente de tensões relativo, conforme visto na figura 12, que mostra a variação do fator de proporcionalidade para vários tipos de metais.

Desta maneira, uma forma de representar matematicamente o fator de proporcionalidade em função do gradiente de tensões relativo, para metais, pode ser vista por:

$$n = 1 + \alpha \chi^{*\beta} \quad (3.09)$$

Quando se trata de aço, tem-se como valores utilizados: $\alpha = 0,45$ e $\beta = 0,30$ (LINKEWITZ ²⁹).

Entretanto para diferentes tipos de aço, esses valores podem se alterar, como

no caso ilustrado na figura 13, retirada da referência BOSCH³⁰, onde se observam as curvas para cinco tipos diferentes de materiais cujas equações possuem valores diferentes para α e β . No caso do 42CrMo4, $\alpha = 0.3873$ e $\beta = 0.3013$. Na figura 13 o fator n é calculado através da equação 3.06, onde σ_{FE} são os valores de tensões de cada gradiente e σ_F são os valores de tensão quando o gradiente é zero.

FIGURA 12 – Alteração do fator de proporcionalidade com o gradiente de tensões relativo.

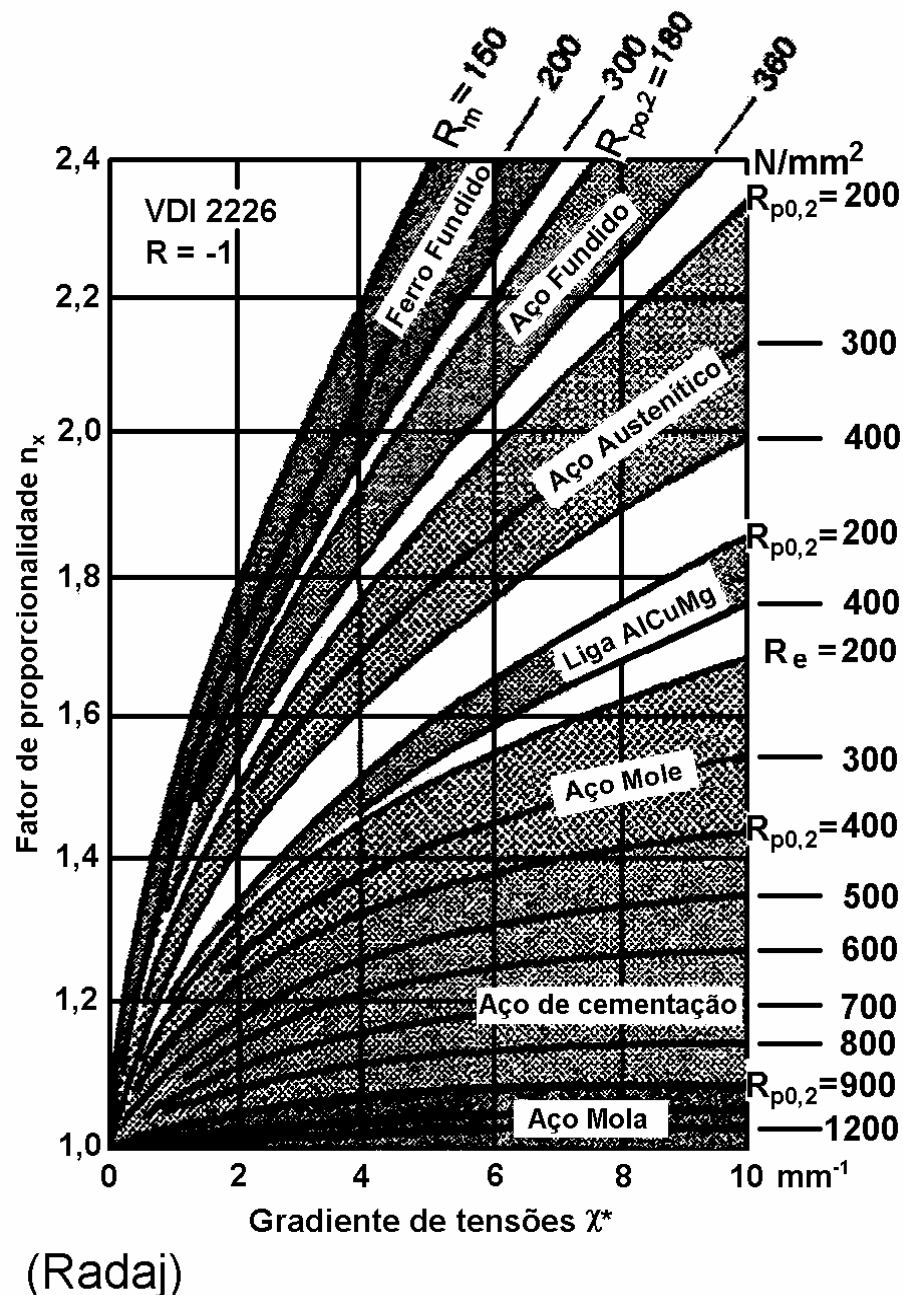
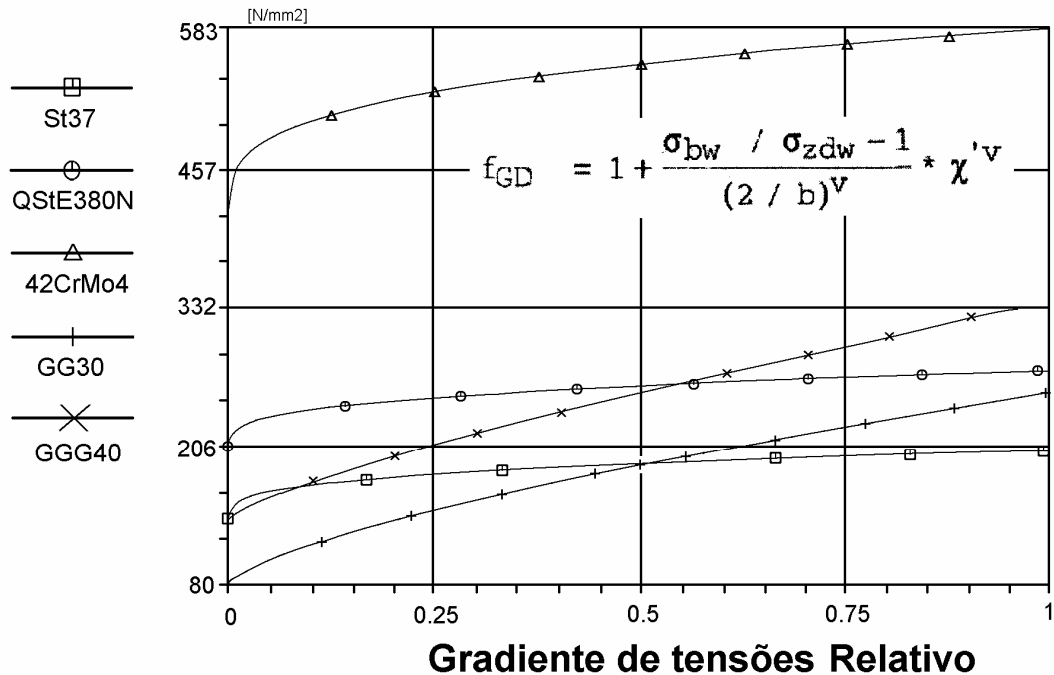


FIGURA 13 - Curva de variação das tensões com o gradiente de tensões relativo.



Neste trabalho será utilizada a curva do aço 42CrMo4, por ser o material semelhante ao do nosso objeto de estudo, o Bico Injetor Bosch.

3.3 APROXIMAÇÃO DA ESCALA MESOSCÓPICA

3.3.1 Introdução

O conceito de limite de fadiga em condições de tensões multi-axiais evoca a idéia da separação de todo o espaço de tensões em duas partes, o não seguro e o seguro. A parte segura do espaço de tensões contém a origem e é contornado por uma superfície fechada. Por conseguinte, o critério de fadiga pode ser expresso como uma inequação. Satisfazer esta inequação implica que o estado de tensões, induzido pelo carregamento cíclico externo, permanece dentro da parte segura do espaço de tensões. Aplicando esse conceito, vários autores propuseram muitos critérios de fadiga em décadas de pesquisa. Entretanto até hoje não há um critério universal e aceito por todos. Esses critérios em sua grande maioria foram concebidos para sistemas de tensões cíclicas em fase. Entretanto, esses conceitos podem ser estendidos para

sistemas de carregamentos cíclicos fora de fase. O método apresentado nesse trabalho, baseado no critério de aproximação da escala mesoscópica, é independente da fase entre os carregamentos do sistema cíclico, o que se pode verificar através das conclusões do artigo de PAPADOPOULOS ¹.

3.3.2 Considerações Iniciais

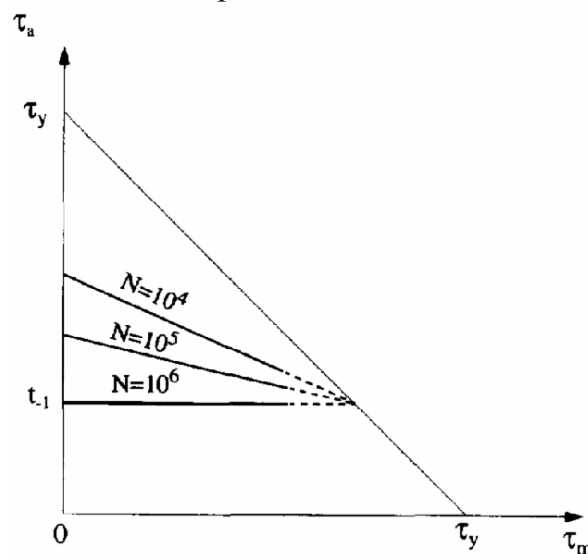
Dos vários critérios para avaliação de fadiga dois fatos experimentais firmemente estabelecidos são levados em consideração:

A. - *A independência do limite de fadiga em torção cíclica com respeito à torção média (estática) superposta.* A amplitude da tensão de cisalhamento, que pode ocorrer quando um corpo é submetido a torção com um número de ciclos muito alto (teoricamente infinito), é único. Este comportamento é notado na figura 14 que é um gráfico tendo como abscissa a tensão de cisalhamento médio e como ordenada a amplitude da tensão de cisalhamento. Para uma dada vida de fadiga, a interação entre τ_m e τ_a é representado por uma linha. Para uma vida de fadiga muito alta (da ordem de um milhão de ciclos ou mais), a linha da interação $\tau_m - \tau_a$ tende a tornar-se horizontal, indicando que o limite da amplitude da tensão de cisalhamento é independente da tensão de cisalhamento médio. Tal diagrama foi construído por SINES ³¹, que analisou os resultados de 27 metais e cames para chegar à conclusão de que o limite de fadiga por torção, correspondendo à fadiga com vida de aproximadamente 10^6 ciclos, é único. Entretanto, para fadiga de vida com ciclos menores (ex. 10^5 , 10^4) a linha de interação $\tau_m - \tau_a$ alcança uma inclinação negativa, a qual significa que para esta vida de fadiga, a amplitude da tensão de cisalhamento é reduzida com o aumento da tensão de cisalhamento médio. Além disso, todas as discussões prévias são válidas desde que o escoamento da peça não seja alcançado, que é para $\tau_m + \tau_a < \tau_y$ onde τ_y é o limite de escoamento no cisalhamento. Esta limitação é representada na figura 14 pela linha unindo os pontos $(\tau_y, 0)$ e $(0, \tau_y)$.

DAVOLI ³² também procurou identificar a influência da tensão de

cisalhamento média na fadiga, executando testes em 39 corpos de prova feitos de aço 39NiCrMo3, onde procurou comparar os resultados obtidos com dados encontrados na literatura. Em seu ponto de vista, deve-se considerar que o limite de fadiga torcional independe da tensão de cisalhamento médio.

FIGURA 14 - Ilustração esquemática da independência do limite de fadiga em torção com respeito à tensão média



B. - *O limite de fadiga na flexão depende fortemente de uma tensão normal média (estática) superposta.* Uma tensão média normal reduz o limite de fadiga, enquanto que uma tensão média compressiva leva a um aumento do mesmo. Esta dependência pode ser descrita exatamente por uma relação linear conforme verificado em inúmeros resultados experimentais apresentados por Lemaitre e Chaboche e em SINES ³¹. Novamente este resultado é aplicado ao comportamento elástico de uma peça, que é geralmente a causa de carregamentos cíclicos correspondentes à vida de fadiga alta.

3.3.2 Critério baseado na aproximação da escala mesoscópica

O comportamento de fadiga de materiais pode ser explorado por diferentes

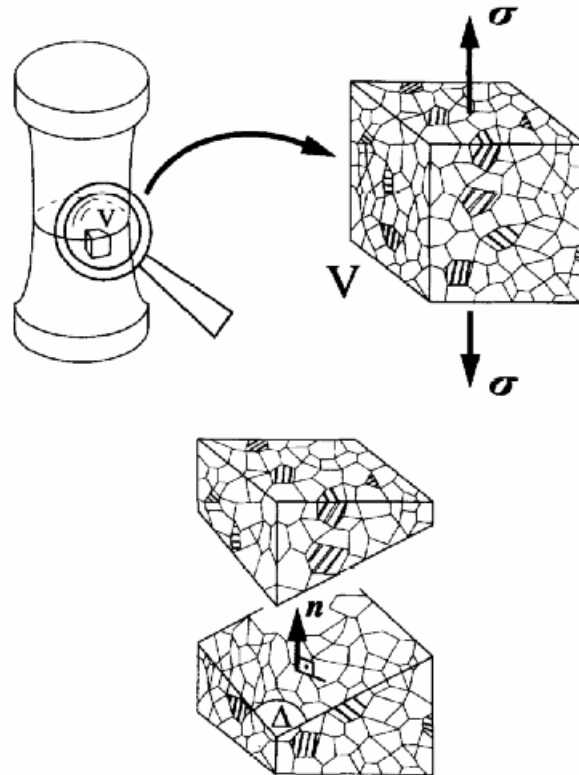
escalas. A escala usada em engenharia é a do meio contínuo médio ou macroscópica. A fadiga de metais pode também ser explorada em sua escala microscópica, que é a escala de deslocamentos granulares. Finalmente, a fadiga de metais pode ser explorada de uma escala intermediária entre os níveis macro e micro. Esta é a escala mesoscópica, que é a escala dos grãos agregados de um metal. O critério formulado a seguir é baseado na aproximação da escala mesoscópica. A aproximação mesoscópica foi introduzida nos estudos de fadiga por Dang Van (conforme PAPADOPOULOS ⁴) no início dos anos 70. Posteriores contribuições foram apresentadas nos últimos anos da década de 80. No presente trabalho serão utilizados os conceitos da aproximação apresentada por PAPADOPOULOS ¹ como critério para fadiga.

Materiais metálicos são agregados de grãos de metais (cristais). Um alto número de grãos é contido em um volume elementar V do material. Os cristais de metal são conhecidos por possuir alguma orientação preferida (sistema de escorregamento) ao longo do qual deformações plásticas, denotadas como γ^p , podem se desenvolver. Cada sistema de deslizamento é composto de um plano de deslizamento e uma direção de deslizamento neste plano. Até mesmo sob baixas cargas externas, preservando um comportamento elástico de um componente, como no caso de uma fadiga de alto ciclo, alguns cristais resistentes do metal sofrem deslizamento plástico. É bem conhecido que deformações plásticas localizadas desenvolvidas em alguns cristais são a principal causa da nucleação de trincas de fadiga. A aproximação de escala mesoscópica objetiva avaliar a deformação plástica γ^p do cristal, ligando-a às grandezas usuais, macroscópicas. Mais precisamente, é a extensão $\Delta\gamma^p$ que tem que ser avaliada. Atualmente, tem sido demonstrado que a deformação plástica acumulada ao longo de uma direção de deslizamento em um plano de deslizamento, denotado como $\Sigma\Delta\gamma^p$, induzido por um carregamento cíclico externo, torna-se proporcional à amplitude de tensão de cisalhamento determinada (T_a), quando o número de ciclos de carregamento aumenta indefinidamente. Entretanto, tem sido mostrado que $\Sigma^\infty\Delta\gamma^p$ é independente da tensão de cisalhamento média determinada T_m

(item 3.3.2). Um critério de fadiga natural poderia então corresponder à limitação de $\Sigma^\infty \Delta \gamma^p$ (e então de T_a), a fim de evitar que a deformação plástica acumulada extrapole a ductilidade do cristal. Esta condição certamente exclui a quebra de um cristal de fluência plástica e a criação de uma “embrio-trinca” dentro de um volume elementar. Entretanto, o que é de interesse na engenharia é prevenir a criação de uma trinca por fadiga da mesma ordem de tamanho de um volume elementar V .

Nesse estudo, torna-se importante conhecer a definição das tensões utilizadas no critério. Seja um corpo sujeito a cargas cíclicas gerais, e V um volume elementar, conforme definido anteriormente, cortado por um plano passando pelo ponto em consideração, onde defini-se Δ como o plano de intersecção deste plano com o volume elementar V . Define-se também \mathbf{n} como o vetor unitário normal a Δ e $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor de tensões em V , tal como ilustrado na figura 15.

FIGURA 15 - Volume elementar V e plano material elementar Δ

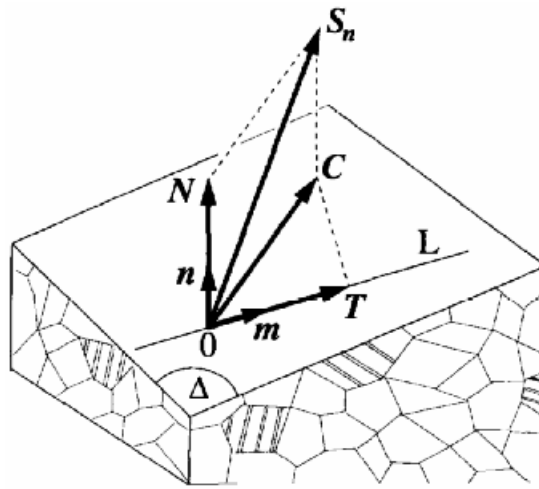


A representação das forças no plano Δ pode ser vista na figura 16, onde: \mathbf{S}_n é o vetor tensão que age em Δ ; \mathbf{N} é o vetor tensão normal agindo em Δ , isto é, a projeção

de S_n em \mathbf{n} ; \mathbf{C} é o vetor tensão de cisalhamento em Δ , ou seja, é a projeção ortogonal de S_n em Δ ; \mathbf{T} é o vetor tensão de cisalhamento resultante da projeção de \mathbf{C} em uma dada linha L , que contém o vetor \mathbf{m} . Desta forma definem-se os tensores seguintes.

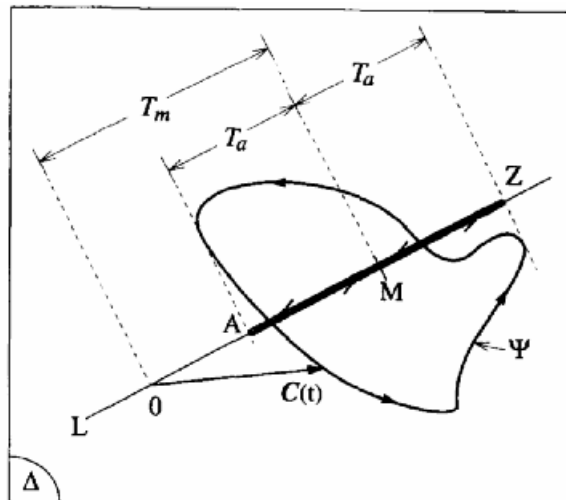
$$\begin{aligned}
 S_n &= \sigma \cdot \mathbf{N} \\
 \mathbf{N} &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S})\mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{N} = (\mathbf{n} \cdot \sigma \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \\
 \mathbf{C} &= S_n - \mathbf{N} \Rightarrow \mathbf{C} = \sigma \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \sigma \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \\
 \mathbf{T} &= (\mathbf{m} \cdot \mathbf{C})\mathbf{m} \Rightarrow T(t) = \mathbf{m} \cdot \mathbf{C}(t)
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

FIGURA 16 - Distribuição dos vetores tensão no plano Δ do volume elementar V .



Neste ponto é interessante, também, definir a amplitude e o valor médio de $T(t)$, respectivamente T_a e T_m , para cargas cíclicas de período P :

FIGURA 17 - Definição da amplitude da tensão de cisalhamento resolvido e da amplitude da tensão de cisalhamento resolvido.



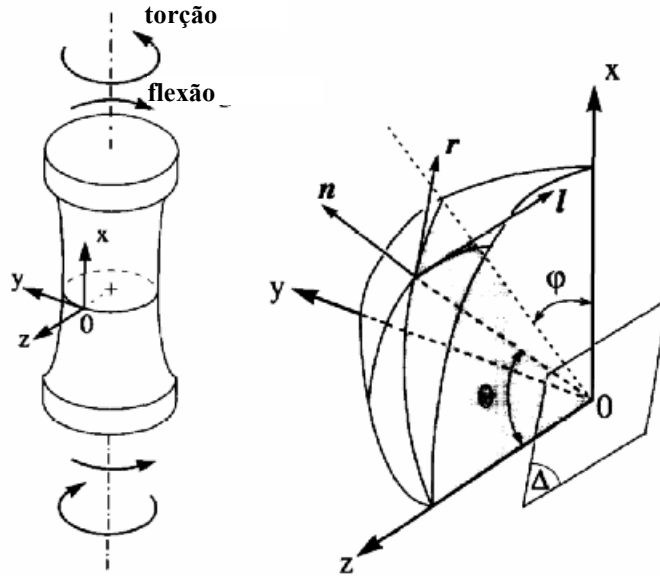
$$\begin{aligned}
T_a &= \frac{1}{2} \left[\max_{t \in P} [\mathbf{m} \cdot \mathbf{C}(t)] - \min_{t \in P} [\mathbf{m} \cdot \mathbf{C}(t)] \right] \\
T_m &= \frac{1}{2} \left[\max_{t \in P} [\mathbf{m} \cdot \mathbf{C}(t)] + \min_{t \in P} [\mathbf{m} \cdot \mathbf{C}(t)] \right]
\end{aligned}
\tag{3.11}$$

Onde Ψ é uma curva fechada C que percorre no plano Δ .

Neste caso em estudo, o critério de fadiga é baseado em uma medida média de uma deformação plástica acumulada em todos os cristais seguintes dentro de V , ou equivalentemente em uma medida média de T_a .

Analisando-se o caso de torção e flexão, considerando-se um ponto O qualquer, origem do sistema de coordenadas $O.xyz$, os ângulos φ e θ posicionam o plano Δ passando pelo ponto O , como pode-se ver no caso da figura 18 de torção e flexão.

FIGURA 18 - Ângulos de identificação do plano Δ num caso de torção e flexão, passando por um ponto O qualquer.



Na figura 18, \mathbf{n} é o vetor unitário normal a Δ ; θ é o ângulo entre \mathbf{n} e o eixo z ; φ é o ângulo entre a projeção de \mathbf{n} no plano $x-y$ e o eixo x , desta forma as coordenadas cartesianas \mathbf{n} em $O.xyz$ é dada por:

$$n_x = \text{sen}\theta \cos\varphi \quad n_y = \text{sen}\theta \text{sen}\varphi \quad n_z = \cos\theta
\tag{3.12}$$

Os vetores **l** e **r** estão no mesmo plano Δ e são expressos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} l_x &= -\sin \varphi & l_y &= \cos \varphi & l_z &= 0 \\ r_x &= -\cos \theta \cos \varphi & r_y &= -\cos \theta \sin \varphi & r_z &= \sin \theta \end{aligned} \quad (3.13)$$

O valor médio escolhido para este fim é a média quadrática volumétrica de $T_a(\varphi, \theta, \chi)$ definido como:

$$\sqrt{\langle T_a^2 \rangle} = \sqrt{5} \sqrt{\frac{1}{8\pi^2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\chi=0}^{2\pi} (T_a(\varphi, \theta, \chi))^2 d\chi \sin \theta d\theta d\varphi} \quad (3.14)$$

onde o ângulo χ , que é o ângulo de **m** em Δ . O ângulo χ varia de 0 a 2π para cobrir todas as direções de deslizamento no plano Δ , enquanto os ângulos φ e θ variam de 0 a 2π e de 0 a π , respectivamente, para cobrir todas as possíveis orientações de Δ dentro do volume V . Limitando o acima mencionado valor médio de T_a (e de $\Sigma\Delta\gamma^p$) não exclui a fratura de alguns cristais isolados e a aparência de algumas embrio-trincas em V . As tensões N que agem em direção normal a estas embrio-trincas claramente afetam a resistência à fadiga. Suas influências serão levadas em consideração através da seguinte medida média:

$$\langle N \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} N(\varphi, \theta) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.15)$$

Pode ser visto que a média volumétrica $\langle N \rangle$ é igual à familiar tensão hidrostática σ_H . Um critério de fadiga para engenharia, cercando todo o volume elementar V do material, pode ser definido como a seguir:

$$\sqrt{\langle T_a^2 \rangle} + \alpha \sigma_{H, \max} \leq \beta \quad (3.16)$$

No caso particular de flexão e torção fora de fase, temos o seguinte tensor descrevendo o estado de tensões:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_a \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right) + \sigma_m & \tau_a \sin\left(\frac{2\pi}{P}t - \delta\right) + \tau_m & 0 \\ \tau_a \sin\left(\frac{2\pi}{P}t - \delta\right) + \tau_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Observando o cisalhamento como uma composição dos cisalhamentos no eixo l e r, os mesmos podem ser descritos da seguinte forma, $C_l = \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ e $C_r = \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$, com isto obtêm-se a seguinte forma para C_l e C_r :

$$\begin{aligned} C_l(t) &= f \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right) + g \cos\left(\frac{2\pi}{P}t\right) + \left(-\frac{\sigma_m}{2} \sin 2\varphi + \tau_m \cos 2\varphi\right) \sin \theta \\ C_r(t) &= p \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right) + q \cos\left(\frac{2\pi}{P}t\right) + \left(-\frac{\sigma_m}{2} \cos^2 \varphi - \frac{\tau_m}{2} \sin 2\varphi\right) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (3.18)$$

que são as equações paramétricas da curva Ψ , que descreve uma elipse no sistema O.lr. Desta forma tem-se que a tensão de cisalhamento resolvida T_a , agindo em uma linha L de Δ é determinada por:

$$T_a = \sqrt{a^2 \cos^2 \chi + b^2 \sin^2 \chi} \quad (3.19)$$

Onde a e b são os semi-eixos da elipse ψ descrita pelo caminho percorrido pelo vetor \mathbf{C} (cisalhamento) em Δ , sendo dados por:

$$a, b = \sqrt{\frac{f^2 + g^2 + p^2 + q^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f^2 + g^2 + p^2 + q^2}{2}\right)^2 - (fq - gp)^2}} \quad (3.20)$$

Na expressão 3.20 f, g, p e q são funções auxiliares:

$$\begin{aligned} f &= \sin \theta \left(-\frac{\sigma_a}{2} \sin 2\varphi + \tau_m \cos 2\varphi \cos \delta \right) \\ g &= -\tau_a \sin \theta \cos 2\varphi \sin \delta \\ p &= -\frac{1}{2} \sin 2\theta (\sigma_a \cos^2 \varphi + \tau_a \sin 2\varphi \cos \delta) \\ q &= \frac{1}{2} \tau_a \sin 2\theta \sin 2\varphi \sin \delta \end{aligned} \quad (3.21)$$

Introduzindo a equação 3.19 na equação 3.14 e fazendo a integração em χ , obtém-se:

$$\sqrt{\langle T_a^2 \rangle} = \sqrt{5} \sqrt{\frac{1}{8\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \pi(a^2 + b^2) \sin \theta d\theta d\varphi} \quad (3.22)$$

Substituindo os semi-eixos a e b da equação 3.20, têm-se:

$$\sqrt{\langle T_{\varphi=0}^2 \rangle} = \sqrt{5} \sqrt{\frac{1}{8\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} (f^2 + g^2 + p + q^2) \sin \theta d\theta d\varphi} \quad (3.23)$$

Uma vez que f , g , p e q são substituídos de acordo com a equação 3.21, a integração dupla sob o sinal radical pode ser desenvolvida analiticamente. Apesar do cálculo intermediário ser complicado, o resultado alcançado possui uma forma muito simples:

$$\sqrt{\langle T_a^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\sigma_a^2}{3} + \tau_a^2} \quad (3.24)$$

A tensão hidrostática máxima é igual a $(\sigma_a + \sigma_m)/3$. Entretanto, o critério, equação 3.16, torna-se:

$$\sqrt{\frac{\sigma_a^2}{3} + \tau_a^2} + \alpha \frac{\sigma_a + \sigma_m}{3} \leq \beta$$

ou

$$A \leq \beta \quad (3.25)$$

Aplicando a equação 3.25, para torção ($\tau_a = t_{-1}$) e flexão completamente reverso ($\sigma_a = f_{-1}$, $\sigma_m = 0$), os parâmetros α e β são obtidos:

$$\alpha = (3t_{-1}/f_{-1}) - \sqrt{3} \quad \beta = t_{-1} \quad (3.26)$$

Em uma análise do critério para um sistema de coordenadas de três dimensões (3D), pode-se escrever o tensor de tensões σ como uma soma de tensores de flexão-torsão no plano x-y e eixo x, no plano y-z e eixo y e no plano x-z e eixo z, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \\
\Rightarrow \boldsymbol{\sigma} &= \begin{bmatrix} \sigma_{a1} \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right) + \sigma_{m1} & \tau_{a1} \sin\left(\frac{2\pi}{P}t - \delta_1\right) + \tau_{m1} & \tau_{a3} \sin\left(\frac{2\pi}{P}t - \delta_3\right) + \tau_{m3} \\ \tau_{a1} \sin\left(\frac{2\pi}{P}t - \delta_1\right) + \tau_{m1} & \sigma_{a2} \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right) + \sigma_{m2} & \tau_{a2} \sin\left(\frac{2\pi}{P}t - \delta_2\right) + \tau_{m2} \\ \tau_{a3} \sin\left(\frac{2\pi}{P}t - \delta_3\right) + \tau_{m3} & \tau_{a2} \sin\left(\frac{2\pi}{P}t - \delta_2\right) + \tau_{m2} & \sigma_{a3} \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right) + \sigma_{m3} \end{bmatrix} \quad (3.27)
\end{aligned}$$

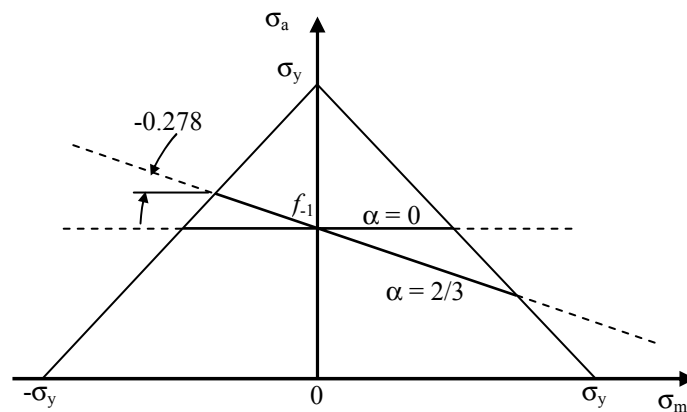
Fazendo-se uma análise análoga à anterior (esta análise está descrita no anexo A), percebe-se que $C_l(t)$ e $C_r(t)$ podem ser escritos da mesma forma, entretanto com outros valores, mais complexos, para f , g , p e q , assim como para os termos independentes de t . Com esta análise, conclui-se que a curva Ψ para este caso também será uma elipse, com os eixos a e b tendo o mesmo valor em relação a f , g , p e q . A partir daí pode-se encontrar a expressão para $\sqrt{\langle T_a^2 \rangle}$, em um caso 3D, e utilizá-la da mesma forma no critério de Papadopoulos. É interessante observar que a expressão encontrada também é independente das fases, δ_1 , δ_2 e δ_3 .

Para preservar os efeitos benéficos observados de uma tensão de flexão média de compressão (ou, respectivamente, a influência em detrimento de uma tensão média de tração) o parâmetro α deve ser positivo. Esta restrição delimita o campo de validação do critério proposto o qual é aplicado para metais com a razão $t_{-1}/f_{-1} > 1/\sqrt{3}$. Na prática a validação do critério proposto é confinada a metais abrangidos pela desigualdade $0.577 \leq t_{-1}/f_{-1} \leq 0.8$. Entretanto esta desigualdade dupla cobre uma faixa larga de metais (isto é, a faixa dos chamados metais duros). Os limites de t_{-1}/f_{-1} dados acima, correspondem aos limites do parâmetro α , $0 \leq \alpha \leq 2/3$. Em vista da equação 3.25, o critério proposto preserva a independência do limite de fadiga na torção com respeito à tensão de cisalhamento média. Além disso, para um carregamento de tensão normal com amplitude σ_a e média σ_m , a equação 3.25 leva a um diagrama do tipo de Haigh descrito pela relação:

$$\sigma_a \leq \frac{3\beta - \alpha\sigma_m}{\sqrt{3} + \alpha} \Rightarrow \sigma_a \leq f_{-1} - \left(1 - \frac{f_{-1}}{\sqrt{3}t_{-1}}\right)\sigma_m \quad (3.28)$$

Na figura 19 este diagrama foi traçado para os dois valores limitantes de α , i.e. $\alpha = 0$ e $\alpha = 2/3$, que correspondem às rampas da linha de Haigh de 0 e -0.278 , respectivamente. A equação 3.28 tem validade enquanto o escoamento do material não for alcançado. Claramente, a conclusão mais importante da equação 3.28, é que de acordo com o critério presente e dentro do seu campo de aplicabilidade descrito anteriormente, *a resistência à fadiga de um carregamento com número muito alto de ciclos de flexão e torção fora de fase é independente da diferença de fase*. Esta conclusão é apresentada por Papadopoulos e totalmente suportada por resultados experimentais. Os outros critérios normalmente mais utilizados prevêm uma forte influência da diferença de fase em flexão e torção. Entretanto, de acordo com a aproximação mesoscópica, a independência com respeito à diferença de fase de espécimes de metal duro, é uma propriedade inerente ao carregamento de flexão-torção. Para outros sistemas de carga (ex. tensões normais biaxiais fora de fase) a aproximação mesoscópica prevê um efeito marcado da diferença de fase na resistência à fadiga, de acordo com os resultados experimentais correspondentes.

FIGURA 19 - Diagrama do tipo de Haigh (PAPADOPOULOS ⁴) representando a influência de uma tensão estática normal no limite de fadiga em flexão. As duas linhas de Haigh mostradas correspondem aos limites do parâmetro α (i.e. $\alpha = 0$ e $\alpha = 2/3$).



4 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

4.1 INTRODUÇÃO

Os problemas encontrados em Engenharia, em sua grande maioria, podem ser resolvidos pelo enfoque da Mecânica do Contínuo, onde a matéria é considerada como um meio contínuo, sem espaços vazios em seu interior. Para a solução de tais problemas é necessário identificar os fatores de influência relevantes que os descrevem, os princípios físicos envolvidos e as variáveis de influência, de forma a elaborar um modelo matemático que o represente. A solução desse modelo recai, quase sempre, na resolução de equações consideradas complexas, como diferenciais parciais e diferenciais ordinárias, obedecendo a condições iniciais e a condições de contorno impostas. Para obter a solução desses problemas são utilizados métodos numéricos dentre os quais o Método dos Elementos Finitos encontra-se como uma poderosa ferramenta, atuando de forma a obter uma aproximação da solução por interpolações algébricas de resolução menos complexa.

O método possibilita encontrar uma solução aproximada para deslocamentos, deformações, tensões, forças e outras possíveis variáveis, tais como temperatura em um corpo sólido. Muitas vezes, deve-se levar em consideração a história de “carregamento”, onde se procura a resposta do corpo em diversos instantes do tempo. A solução pelo Método dos Elementos Finitos é resultado de vários tipos de aproximação da geometria da peça; da equação governante do problema; e o processo de solução propriamente dito. Conforme o processo adotado, tem-se uma formulação forte ou clássica do problema ou uma formulação fraca ou variacional.

4.2 FORMULAÇÃO FORTE

Para um melhor entendimento dos conceitos a serem apresentados, é utilizado um problema de valor de contorno simples, conforme HUGHES³³, o qual está baseado na seguinte equação diferencial:

$$u_{,xx} + f = 0 \quad (4.01)$$

onde $u_{,xx} = d^2u / dx^2$, e f é uma função suave definida no intervalo unitário, $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. Para a caracterização do problema é necessária a imposição de condições de contorno na função u . Desta forma assume-se que u satisfaz:

$$u(1) = q \quad (\text{condição de contorno essencial}) \quad (4.02)$$

$$-u_{,x}(0) = h \quad (\text{condição de contorno natural}) \quad (4.03)$$

onde q e h são constantes dadas. As condições de contorno impostas por 4.02 e 4.03 são conhecidas como valores de contorno do problema. Com isto, a forma forte do problema de valor de contorno, (S) , é escrito como:

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \text{Dado } f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \text{ e as constantes } q \text{ e } h, \text{ encontre } u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que} \\ u_{,xx} + f = 0 \quad \text{em } \Omega \\ u(1) = q \\ -u_{,x}(0) = h \end{array} \right. \quad (4.04)$$

onde $\bar{\Omega} = [0,1]$. Então a solução exata de (S) é:

$$u(x) = q + (1-x)h + \int_x^1 \left\{ \int_0^y f(z) dz \right\} dy \quad (4.05)$$

4.3 FORMULAÇÃO FRACA OU VARIACIONAL

Para a definição da formulação fraca, é necessário que se definam duas classes de funções. A primeira é o conjunto de funções admissíveis, às quais são candidatas à solução do problema. Desta forma, afim de que seja solução do problema,

é exigido que se satisfaça a condição de contorno 4.02. Entretanto, para que uma certa expressão possa ser empregada nesse sentido, é necessário que a derivada das funções admissíveis sejam integráveis ao quadrado, ou seja, para u tem-se que:

$$\int_0^1 (u_{,x})^2 dx < \infty \quad (4.06)$$

Desta forma, pode-se escrever o espaço de funções admissíveis U :

$$U = \left\{ u(x) \mid u(1) = q, \int_0^1 (u_{,x})^2 dx < \infty \right\} \quad (4.07)$$

A segunda classe de funções é conhecida como função peso ou perturbação. Este conjunto é bastante semelhante ao espaço de funções admissíveis, exceto que é exigido que a função peso, w , se anule em $x = 1$, $w(1) = 0$. Este conjunto de funções é denominado por W e é definido da seguinte forma:

$$W = \left\{ w \mid w(1) = 0, \int_0^1 (w_{,x})^2 dx < \infty \right\} \quad (4.08)$$

Desta forma pode-se definir uma formulação fraca satisfatória (W), do problema de valor de contorno:

$$(W) \left\{ \begin{array}{l} \text{Dado } f(x), g \text{ e } h, \text{ determinar } u(x) \in U \mid \forall w(x) \in W, \\ \int_0^1 w_{,x} u_{,x} dx = \int_0^1 f \cdot w \cdot dx + h \cdot w(0) \end{array} \right. \quad (4.09)$$

Esta formulação, na Mecânica, está relacionada ao Princípio dos trabalhos virtuais, ou Deslocamentos Virtuais, sendo que os w são os deslocamentos virtuais.

A solução de (W) é chamada de solução fraca ou generalizada.

4.4 MÉTODO DE APROXIMAÇÃO DE GALERKIN

Trata-se de se desenvolver um método que construa uma aproximação dimensional finita de U e W . Essas coleções de funções são denotados por U^h e W^h

respectivamente. O índice sobrescrito refere-se à associação de U e W com uma malha, ou discretização, do domínio, que é parametrizado por um comprimento escalar característico h . U^h e W^h são considerados como subconjuntos de U e W , desta forma podem ser escritos como:

$$U^h \subset U \quad (\text{i.e. se } u^h \in U^h, \text{ então } u^h \in U) \quad (4.10)$$

$$W^h \subset W \quad (\text{i.e. se } w^h \in W^h, \text{ então } w^h \in W) \quad (4.11)$$

Como consequência direta de 4.10 e 4.11, tem-se que se $u^h \in U^h$ e $w^h \in W^h$, então:

$$u^h(1) = q \quad (4.12)$$

$$w^h(1) = 0 \quad (4.13)$$

O princípio básico do Método dos Elementos Finitos prevê que as soluções u^h e w^h possam ser obtidas a partir de combinações lineares dos respectivos valores nodais, com isso o domínio é discretizado em elementos resultando em uma malha com n pontos nodais, conforme pode ser visto em 4.14 e 4.15.

$$u^h = \sum_{i=1}^n N_i(x) u_i \quad (4.14)$$

$$w^h = \sum_{i=1}^n \varphi_j(x) w_j \quad (4.15)$$

onde N_i e φ_j são funções de interpolação entre os nós e u_i e w_j são coeficientes constantes relacionados aos pontos nodais. No Método de Galerkin, consideram-se as funções φ_j como iguais às funções N_i .

Como o Método dos Elementos Finitos utiliza soluções aproximadas para resolução de problemas, por não ser exata, essa solução gera resíduo, $R(x)$, no domínio. A minimização desse resíduo utilizando funções peso $w^h(x)$ é a idéia

principal do Método dos Elementos Finitos.

$$\int_0^1 R w^h dx = 0, \quad \forall w^h \in W^h \quad (4.16)$$

A implementação do Método dos Elementos Finitos no presente trabalho se dará pela utilização de um conhecido software comercial denominado ABAQUS.

4.5 CARACTERIZAÇÃO DOS ELEMENTOS DE ACORDO COM O ABAQUS

Para diversas aplicações (formulações ou problemas) diferentes, o Método dos Elementos Finitos utiliza vários tipos diferentes de elementos, cada um com suas aproximações e funções características, que possibilitam uma solução apropriada para cada situação a ser estudada (simulada).

Uma formulação de elemento refere-se à teoria matemática usada para definir o comportamento do elemento. Todos os elementos do ABAQUS³⁴ que são do tipo tensão/deslocamento estão baseados na descrição de comportamento Lagrangiano ou material. Na alternativa Euleriana, ou espacial, a descrição dos elementos são fixadas no espaço com o material fluindo através deles. Os métodos Euleriano são utilizados comumente em simulações de mecânica dos fluidos.

Para acomodar diferentes tipos de comportamento, alguns tipos de elementos incluem várias formulações diferentes. Por exemplo, os elementos de casca têm três classes: uma satisfatória para análises de casca com propósito geral, outra para cascas finas, e ainda outra para cascas espessas. Na figura 20, pode se ver alguns dos tipos de elementos mais utilizados para análises de tensões.

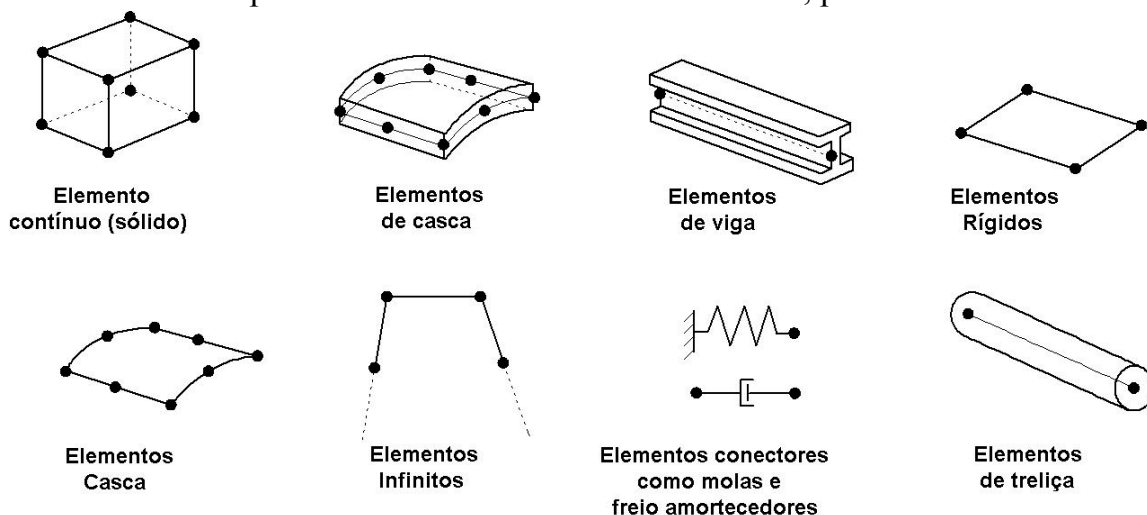
Alguns tipos de elemento têm uma formulação padrão assim como algumas formulações alternativas. Por exemplo, a formulação híbrida (para lidar com comportamentos incompressíveis ou inextensíveis).

O ABAQUS utiliza a formulação de massa agrupada para elementos de baixa ordem. Como consequência o segundo momento de inércia de massa pode

divergir dos valores teóricos, especialmente para malhas pobres.

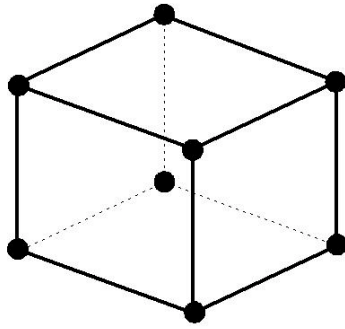
O ABAQUS utiliza uma técnica numérica para integrar várias quantidades sobre o volume de cada elemento, permitindo, desta forma, uma generalidade completa do comportamento do material. Utilizando a quadratura Gaussiana para os elementos, a resposta do material é avaliada em cada ponto de integração em cada elemento. Quando se utiliza elemento contínuo, deve-se escolher entre integração total ou reduzida, uma escolha que pode ter um efeito significativo na precisão do elemento para um dado problema.

FIGURA 20 - Tipos de elementos comumente utilizados, para análise de tensões.

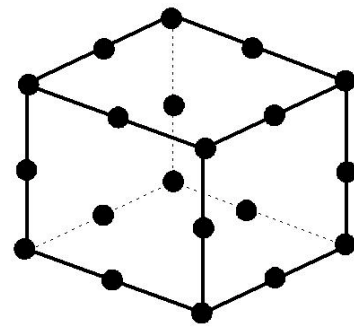


Deslocamentos ou outros graus de liberdade são calculados em um nó do elemento. Em qualquer outro ponto no elemento, o deslocamento é obtido por interpolação dos deslocamentos nodais. Geralmente a ordem de interpolação é determinada pelo número de nós utilizado no elemento. Os elementos que tem nós somente em seus vértices, tal como o “brick” de 8 nós mostrado na figura 21, usam interpolação linear em cada direção

FIGURA 21 - Elementos “brick” linear e quadrático.



(a) Elemento linear
(8 nós "brick", C3D8)



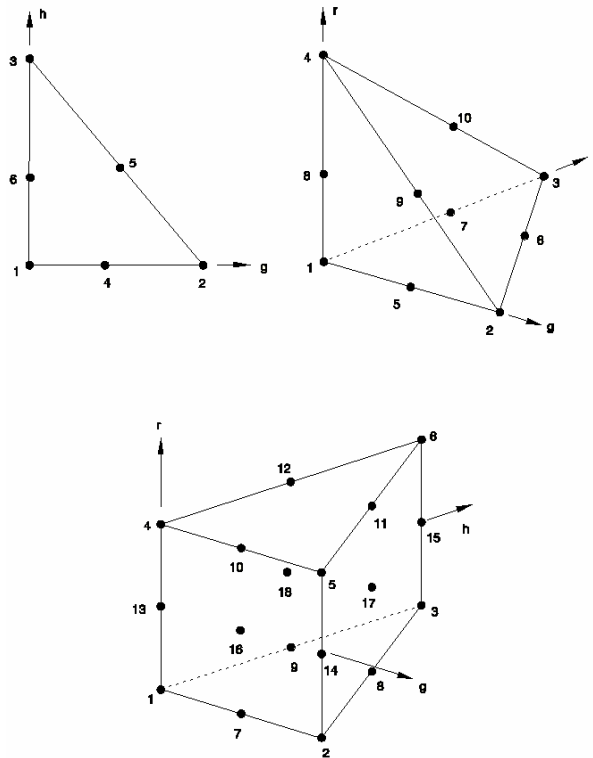
(b) Elemento quadrático
(20 nós "brick", C3D20)

4.6 ELEMENTOS TRIANGULARES, TETRAÉDRICOS E PRISMA

Estes elementos são sempre utilizados nos casos de análises do tipo tensão/deslocamento onde a geometria envolvida é complexa, permitindo com isto que a malha seja o mais próxima possível da geometria real. Na figura 22 pode-se ver esses elementos com a convenção de numeração de nós utilizada no ABAQUS. Os nós dos vértices são numerados primeiro, e então os nós no meio para elementos de segunda ordem.

No caso da simulação deste estudo, devido à geometria do Bico Injetor, o elemento utilizado foi o tetraédrico, quadrático (C3D10M)

FIGURA 22 - Elementos mestre isoparamétricos.

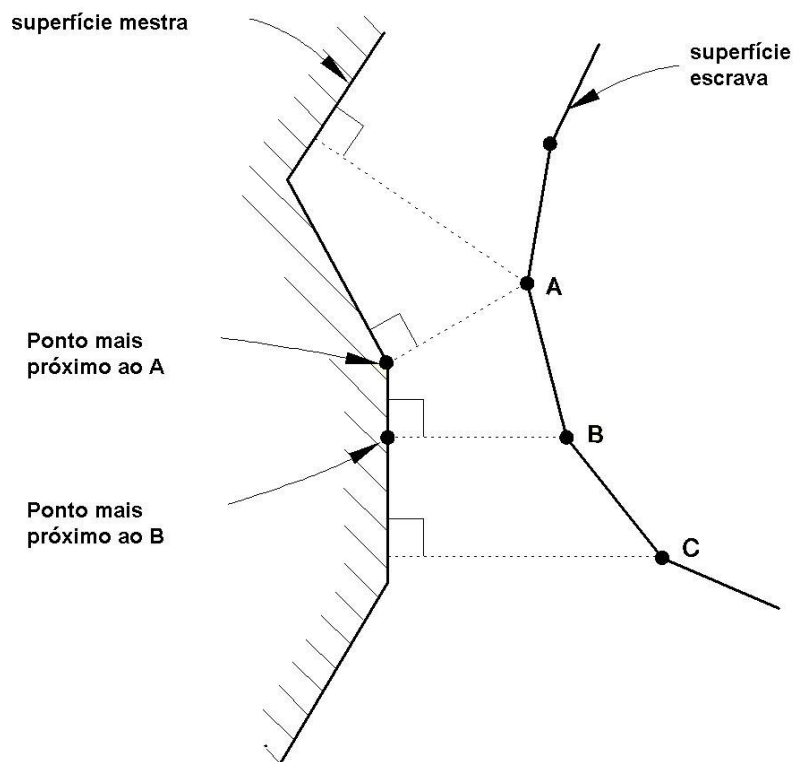


4.7 CONTATO ENTRE SUPERFÍCIES

4.7.1 Introdução

Existem algumas formulações especiais para elementos finitos que permitem com que em uma análise seja considerada a possibilidade de contato entre superfícies. Isso implica em uma definição de superfícies de contatos, uma escrava ('slave') e outra mestra ('master'), que durante a simulação interagem entre si criando novas condições de contorno para a análise. Durante uma análise envolvendo contato, o ABAQUS tenta, para cada nó da superfície escrava, encontrar o ponto mais perto da superfície mestra do par de contato, onde a normal à superfície mestra passe através do nó na superfície escrava (figura 23). A interação é, então, discretizada entre o ponto na superfície mestra e o nó escravo.

FIGURA 23 - Discretização do contato e interação.

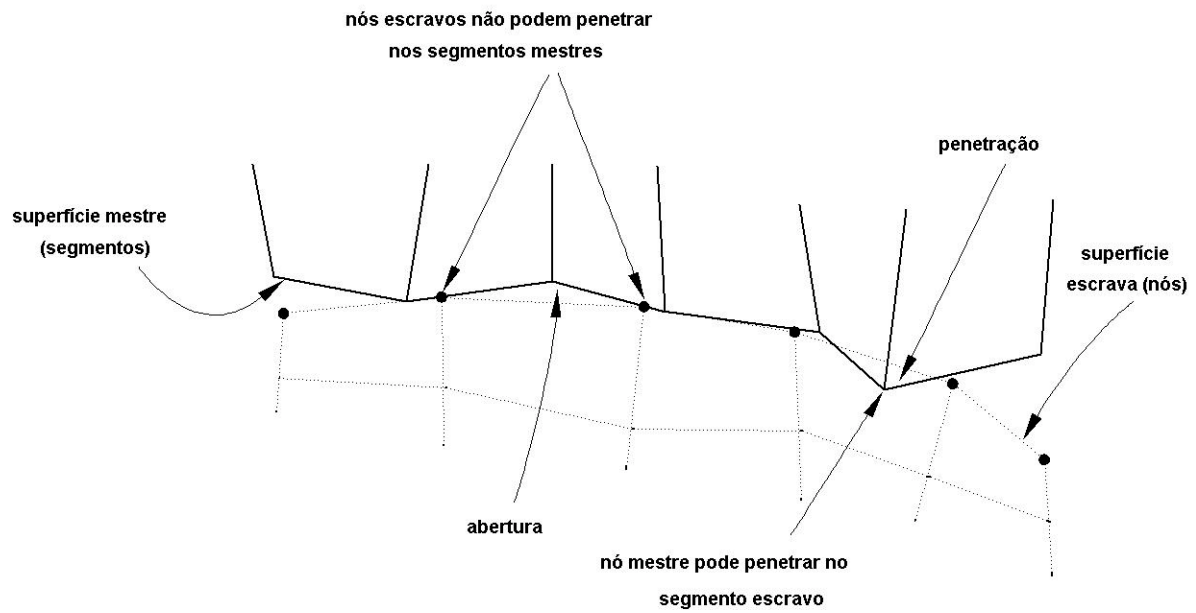


4.7.2 Estabelecendo o contato

O ABAQUS define as condições de contato entre dois corpos usando um algoritmo “master-slave” rígido. Em problemas mecânicos tem-se que:

- Cada condição de contato potencial é definida em termos de nó escravo e uma superfície mestra.
- Os nós escravos são restringidos a não penetrar na superfície mestra; entretanto, os nós da superfície mestra podem, em princípio, penetrar na superfície escrava, figura 24.
- A direção do contato é sempre normal à da superfície mestra.

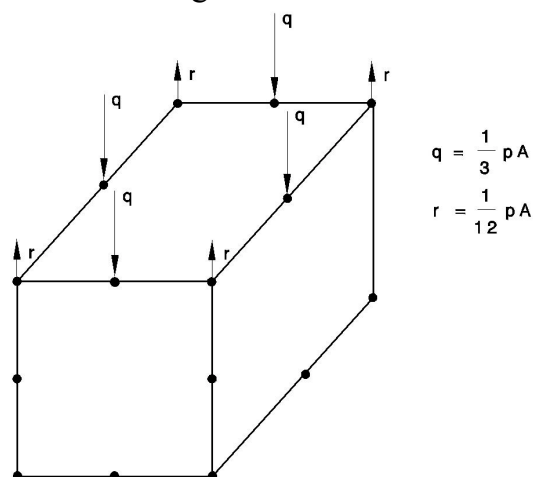
FIGURA 24 - Penetração do nó mestre na superfície escrava.



4.7.3 Usando elementos tridimensionais de segunda ordem

Alguns elementos de segunda ordem podem ser problemáticos em simulações de contato devido à distribuição de forças nodais equivalentes quando uma pressão atua na face do elemento. Como mostrado na figura 25, uma pressão constante aplicada à face de um elemento de segunda ordem, que não tem um nó de meio de face, produz forças nos nós dos vértices, agindo em sentido oposto da pressão.

FIGURA 25 - Cargas nodais devido à pressão constante em um elemento de face de segunda ordem.



Para contornar esse problema, o ABAQUS converte automaticamente a maioria dos elementos tridimensionais de segunda ordem sem nós de meio de face que formam a superfície escrava em elementos com nós de meio de face.

Os elementos modificados tetraédricos de segunda ordem (C3D10M) são designados no ABAQUS a serem utilizados em simulações de contato complexo. Elementos tetraédricos de segunda ordem regular (C3D10) têm força zero de contato em seus nós nos vértices, levando à predição pobre das pressões de contato. Eles poderiam, entretanto não ser utilizados em problemas de contato. Os elementos modificados tetraédricos de segunda ordem podem calcular as pressões de contato com precisão. Desta forma, como na simulação deste trabalho está se utilizando o contato entre a agulha e o Bico, afim de se incluir qualquer influência existente desta montagem, é utilizado o elemento modificado C3D10M.

4.8 MALHA DE ELEMENTOS

A malha, como é conhecida, é o conjunto de elementos e nós utilizados na discretização de um modelo geométrico para o cálculo com o método de elementos finitos. O processo de geração de malha em um modelo é algo de fundamental importância para se definir o nível de precisão dos resultados a serem obtidos. Quanto maior o número de elementos e nós, maior é a precisão do resultado. A malha deve se ajustar da melhor forma possível ao formato geométrico do modelo da peça estudada, entretanto a sua “densidade” pode variar localmente conforme a necessidade geométrica local. Isto significa que em regiões com detalhes muito pequenos, é necessária uma densidade maior da malha para melhor representá-la.

Quando se trata de fadiga, a região mais provável a sofrê-la deve sempre ter um bom refinamento na malha, pois a precisão das tensões obtidas na região deve ser a melhor possível. Ao mesmo tempo estas regiões costumam a ter geometrias mais complexas o que reforça a necessidade de se ter uma malha refinada nesta região.

5 APLICAÇÃO DO MODELO NO BICO INJETOR

O desenvolvimento de novas tecnologias no meio automobilístico, no sentido de atender às leis de emissões cada vez mais rigorosas, faz com que os Sistemas Injetores tornem-se mais solicitados. Aliado a isso, o mercado exige sempre mais produtos com preços competitivos, forçando um uso mais racional de quantidade e qualidade de material, no projeto de novas peças, assim como de custo do desenvolvimento.

O caso descrito se aplica integralmente ao desenvolvimento dos Injetores Diesel e, mais especificamente, aos Bicos Injetores. Por trabalharem com pressões extremamente alta, variações de temperatura e impacto mecânico, os Bicos Injetores sofrem uma série carregamentos que aumentam a probabilidade de falha por fadiga. Essas falhas, quando ocorrem durante o funcionamento de um motor, fazem com que o combustível não seja injetado apropriadamente na câmara de combustão, provocando, com isso, desde falha do motor devido à ineficiência de queima, até a danificação do pistão e camisa do motor devido a fragmentos do Bico que podem aparecer.

No sentido de evitar que esses problemas ocorram, o projeto desse produto inclui vários testes de durabilidade, para determinação de qual é a pressão máxima de trabalho do Bico Injetor, sem que falhe por fadiga.

Determinando-se, teoricamente, qual seria o limite de fadiga da peça, é reduzido, consideravelmente, a quantidade de amostras, e com isso também o tempo, necessárias para se determinar experimentalmente qual seria o limite de fadiga do Bico. Possibilitando um desenvolvimento mais rápido, e de menor custo.

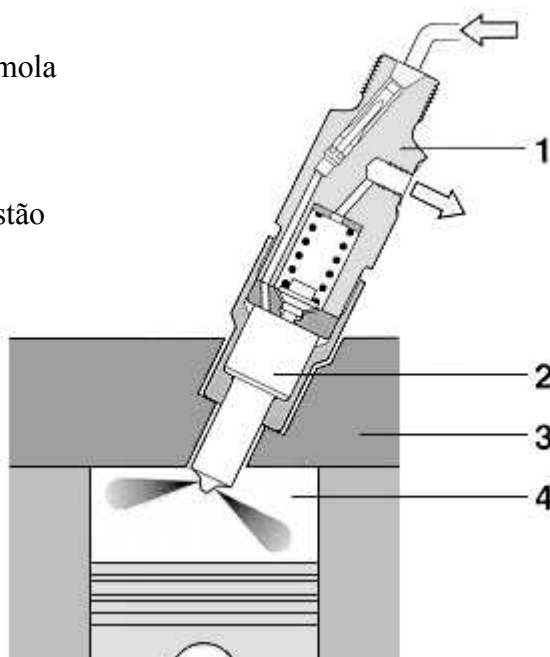
5.1 INFORMAÇÕES TÉCNICAS

5.1.1 Introdução

O Injetor é o elemento de ligação do Sistema de Injeção com o Motor, conduzindo o combustível e tendo papel fundamental no valor de pressão e forma de injeção (taxa) no motor. De uma maneira geral, a figura 26 ilustra o princípio do Porta Injetor e Bico na injeção direta em motor.

FIGURA 26 - Princípio da injeção de combustível na câmara de combustão de um motor.

1. Porta Injetor com mola filtro e conexões
2. Bico
3. Cabeçote
4. Câmara de combustão



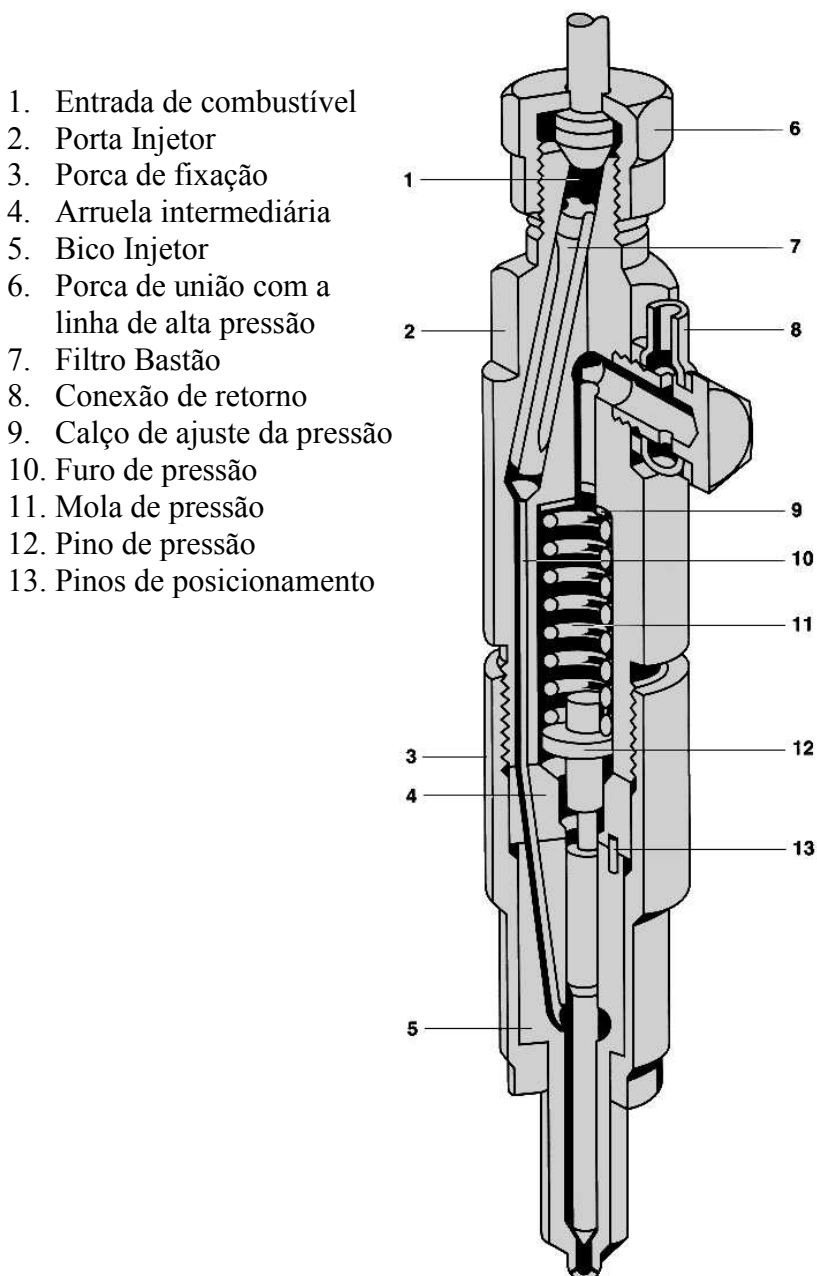
Existem vários tipos de Injetores para atender às diversas aplicações no mercado. Para melhor entendimento, será apresentada a seguir uma forma básica do funcionamento de um Injetor, com o intuito de situar a importância e utilização do Bico no sistema de injeção.

5.1.2 Montagem do Injetor

Conforme pode ser visto na figura 27, o Bico é centrado no Porta Injetor e

fixado usando a porca de fixação. Quando o corpo do Bico e a porca de fixação estão apertados, a arruela intermediária é forçada para cima contra a superfície de vedação do Porta Injetor e a porca de fixação. A arruela intermediária atua como um limitador do curso da agulha, e centraliza o Bico no Porta Injetor com os seus pinos guia.

FIGURA 27 - Desenho esquemático de um Injetor padrão.



A mola é centrada pelo pino de pressão, por meio do qual a direção é assumida pela pressão conduzida pela Agulha do Bico.

O Bico é conectado à linha de alta pressão da bomba injetora pelo furo de alimentação do Porta Injetor, pela arruela intermediária e pelo furo de alimentação do Bico.

5.1.3 Modo de operação

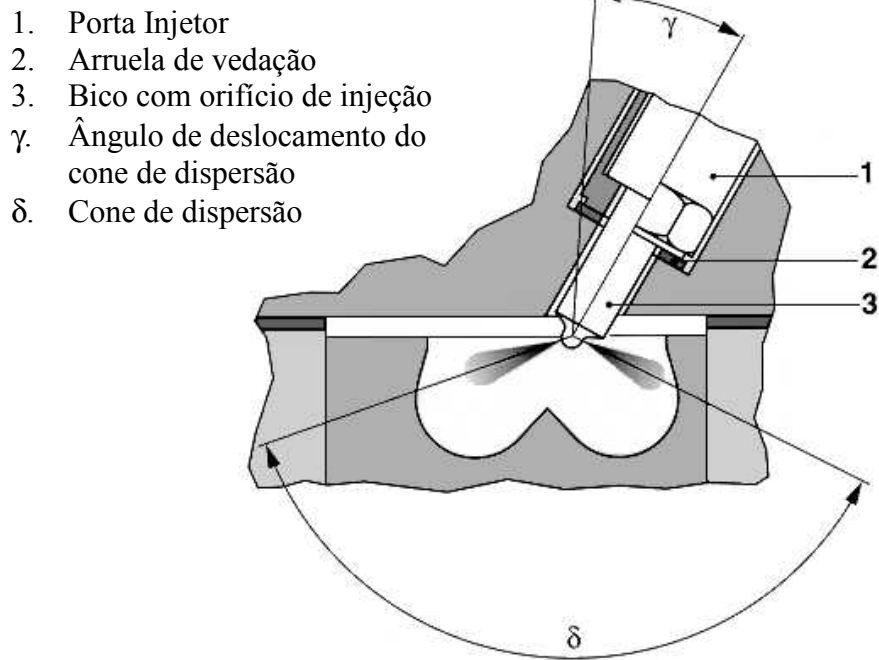
A mola aplica pressão na agulha do Bico através do pino de pressão. A pré-tensão da mola define a pressão de abertura da agulha, que pode ser ajustada utilizando um calço.

No seu caminho para o assento do Bico, o combustível passa através do furo de entrada do Porta Injetor, a arruela intermediária, e o Bico. Quando a injeção ocorre, a Agulha é levantada pela pressão de injeção e o combustível é injetado através dos orifícios de injeção dentro da câmara de combustão do motor. A injeção termina assim que a pressão de injeção cai o suficiente para que a mola force a agulha de volta ao seu assento.

5.1.4 Aplicação

Bicos com orifícios de injeção são utilizados para injeção direta em motores. Em sua maioria, a posição de instalação é definida pelo projetista do motor. Os furos para a dispersão do combustível, que podem ser dispostos em diversos ângulos e posições na cúpula do Bico, têm que ser orientados adequadamente à câmara de combustão, de forma a permitir que a queima do combustível ocorra no local e tempo corretos, figura 28, garantindo uma melhor queima e eficiência do motor.

FIGURA 28 - Posição do Bico com orifício de injeção na Câmara de combustão.



5.2 MODELAGEM COMPUTACIONAL

5.2.1 Modelo do Bico

Para avaliação do método, foi considerado um Bico Injetor (Bico + agulha), figura 29, produzido pela Bosch, utilizando material de fabricação de série, cujas propriedades são conhecidas.

Para a solução aproximada do problema, utilizou-se o Método dos Elementos Finitos. Para tanto, foi utilizado um software comercial de Elementos Finitos, o ABAQUS versão 6.3 (2003), onde foram feitos um modelo 3D com uma malha de 23488 elementos tetraédricos (C3D10M) para o Bico e de 4829 elementos tetraédricos (C3D10M) para a agulha, cuja montagem pode ser vista na figura 29. Devido às simplificações, simetria geométrica e de cargas, foi modelado apenas a metade, utilizando-se a condição de contorno de simetria na face de corte. Na figura 30 pode-se ver a malha utilizada para o Bico e para a agulha. Devido à geometria do Bico no local

mais solicitado (chamada de “spickel”) ser complexa, foi necessário um refinamento maior da malha, de forma a se obter tensões mais precisas.

Na simulação o modelo é carregado em três estágios. No primeiro estágio é aplicado o carregamento devido à montagem do Bico, figura 31. No segundo estágio é adicionada carga relativa à pressão mínima atuante no Bico, figura 32. No terceiro estágio é adicionada a carga relativa à pressão máxima, figura 33. Desta forma é possível obter as tensões máximas e mínimas, necessárias para avaliação de fadiga e prever onde poderá haver quebra por fadiga.

FIGURA 29 - Modelo 3D do Corpo Injetor, com as condições de contorno e cargas.

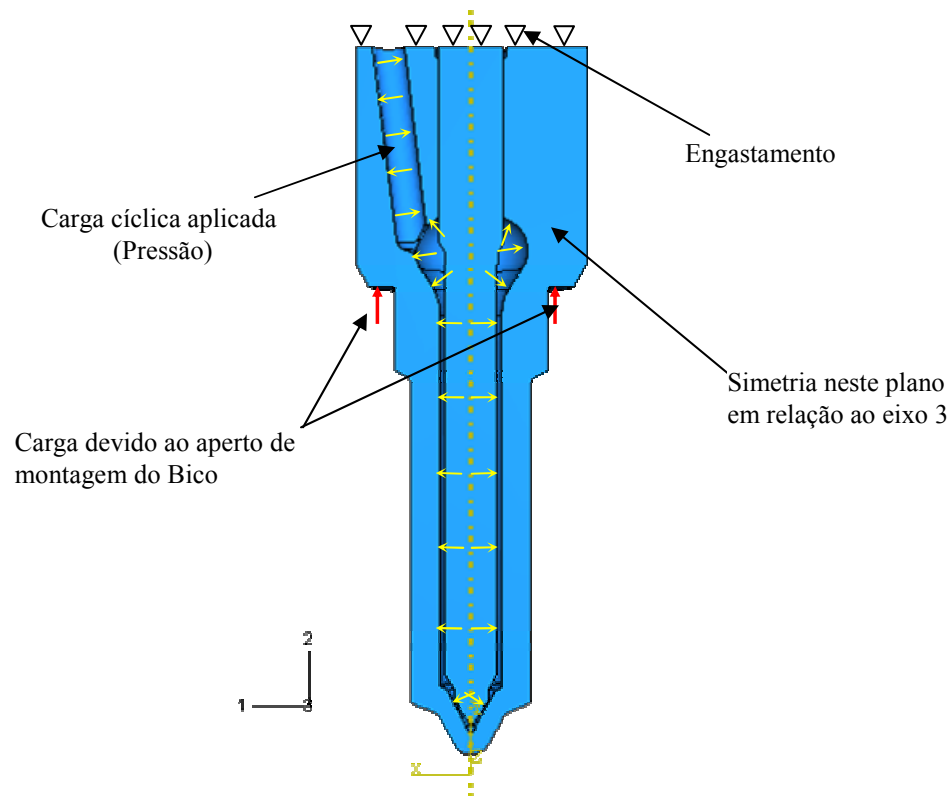


FIGURA 30 – Malha do Bico e da Agulha utilizando elementos tetratédricos (3D) – C3D10M. a) Malha do Bico; b) Malha da Agulha.

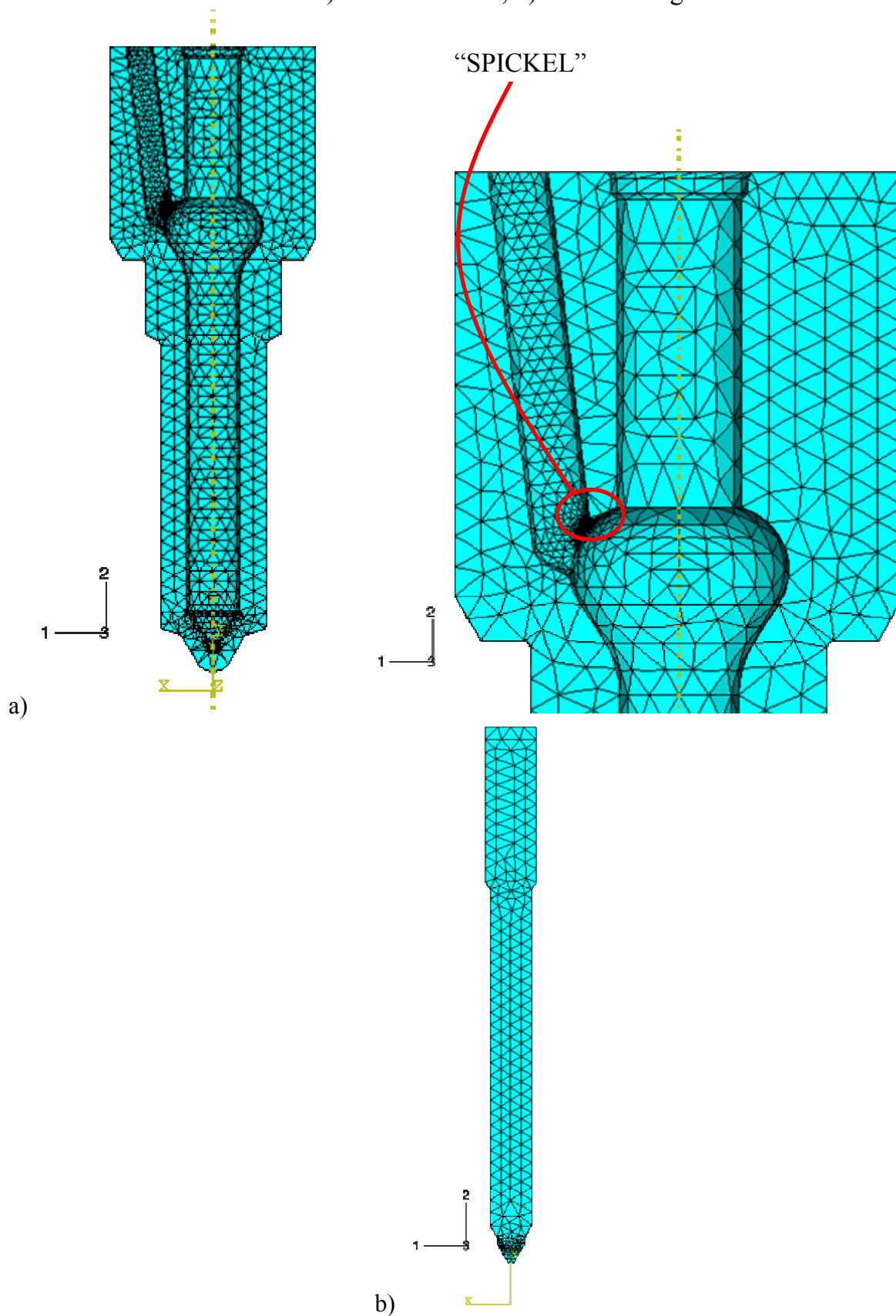


FIGURA 31 - Distribuição de tensões devido ao aperto de montagem do Bico em Mpa.

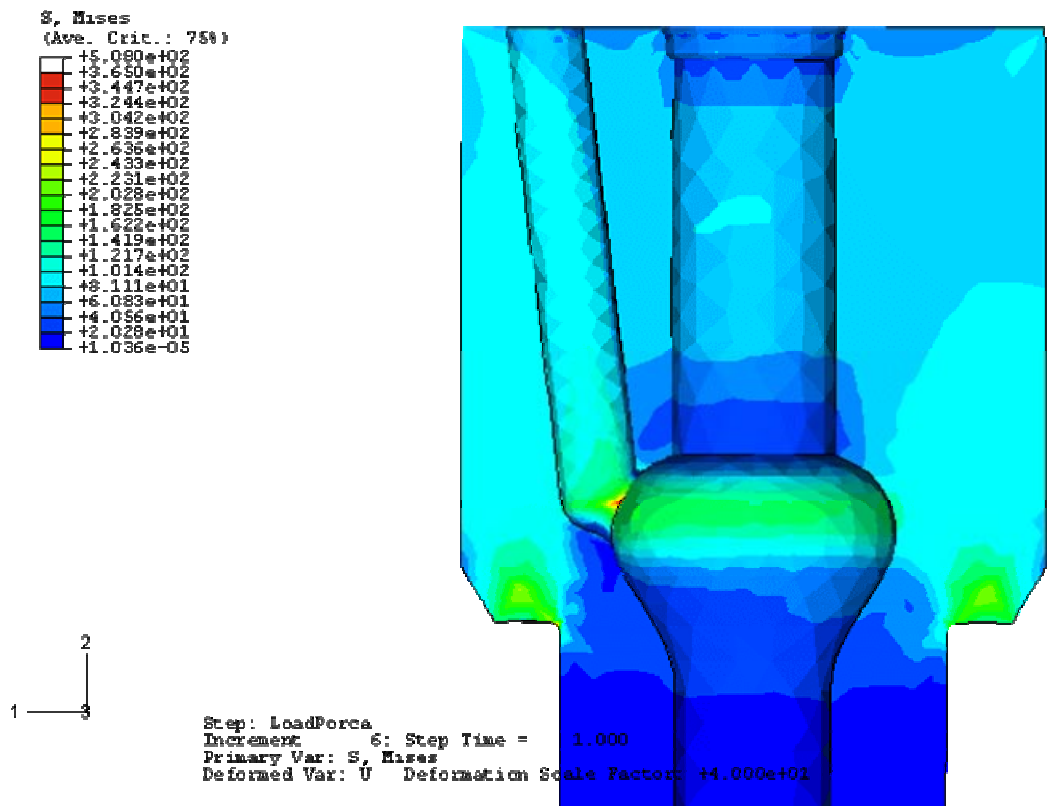


FIGURA 32 - Distribuição de tensões devido à aplicação da pressão mínima em MPa.

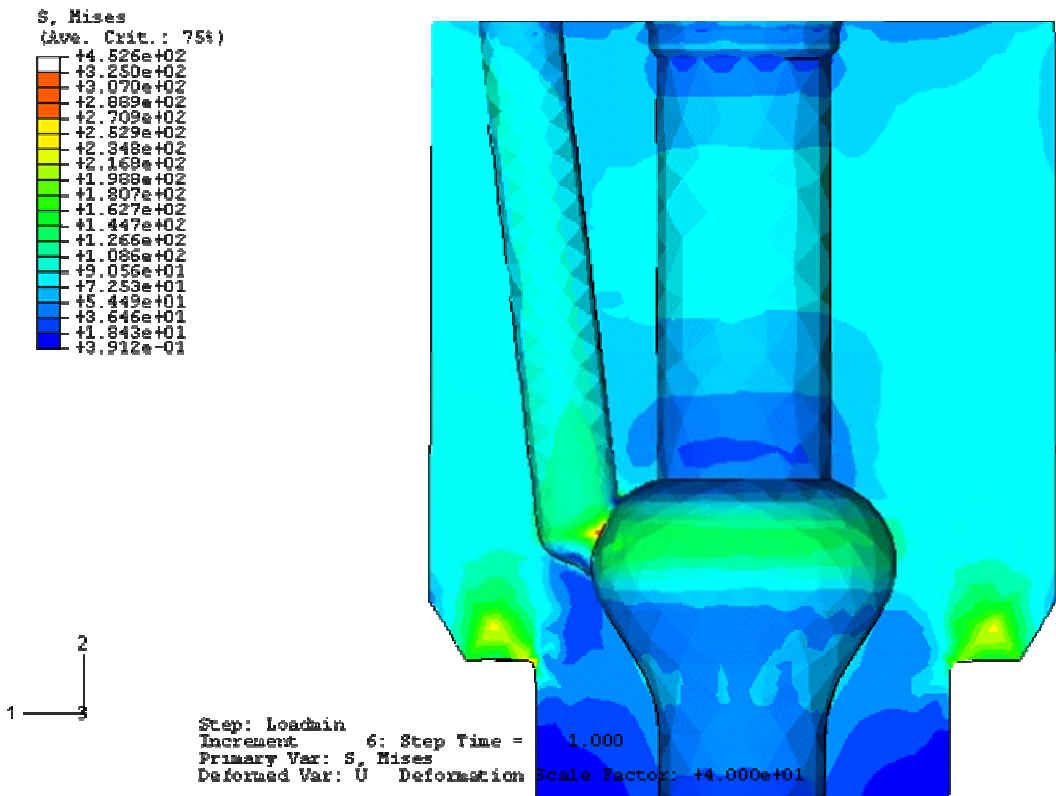
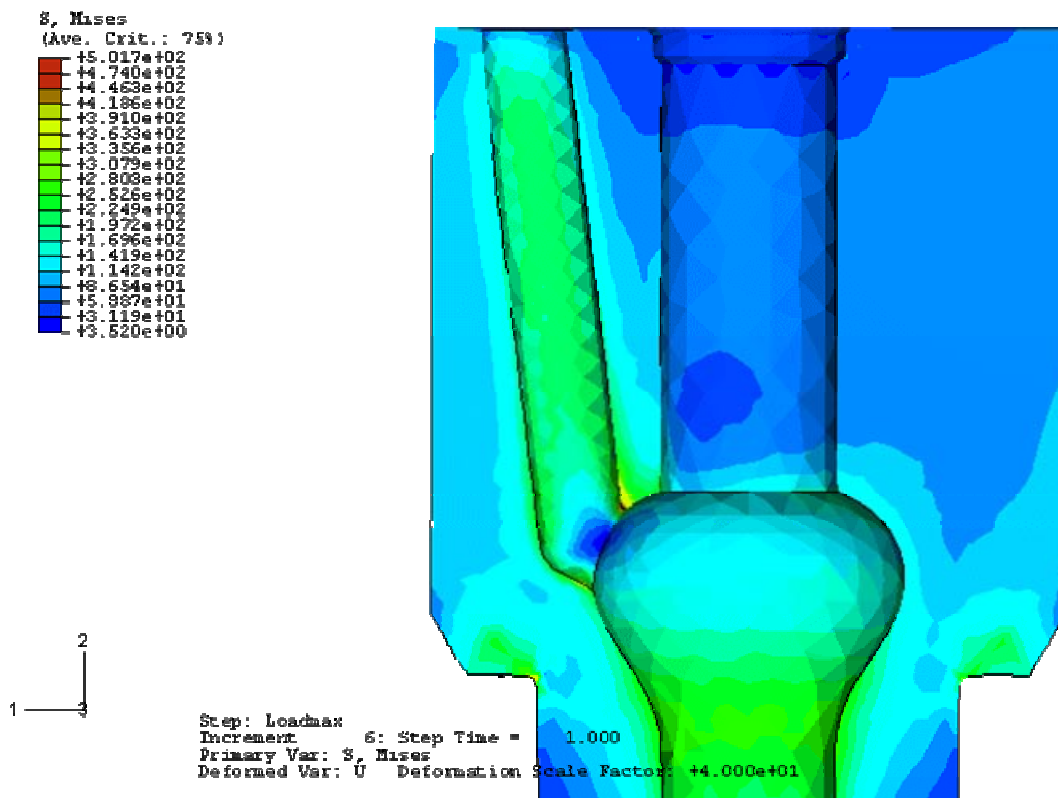


FIGURA 33 - Distribuição de tensões devido à aplicação da carga máxima em MPa.



5.2.2 Modelagem com o ABAQUS

Os modelos do Bico e da agulha foram feitos pelo software Pro-e 2000 i2, por sua enorme facilidade em trabalhar com desenhos em 3D e boa compatibilidade para exportar modelos para o ABAQUS. Uma vez importado os modelos pelo ABAQUS, os seguintes passos foram executados:

- **Simetria:** Com a geometria do Bico simplificada, porém sem afetar a confiabilidade do resultado, admitiu-se um plano de simetria geométrica e de cargas. O modelo foi “cortado” a fim de permitir que se utilize apenas metade do mesmo, reduzindo a quantidade de elementos na malha, aumentando a velocidade do cálculo.
- **Montagem:** Foi feita a montagem geométrica (posição) da agulha no Bico.
- **Etapas:** Foram determinadas quantas e quais etapas seriam utilizadas para a simulação, onde cada etapa está relacionada com um estágio de carga. O ABAQUS calcula as etapas de acordo com a ordem especificada, utilizando os dados calculados

em uma etapa como entrada para o cálculo da próxima etapa. No presente caso: etapa 1, cargas de montagem do Bico no dispositivo, sem pressão; etapa 2, carga relativa a pressão mínima atuante no Bico durante o ensaio de pulsação hidráulica; etapa 3, carga relativa a pressão máxima da pulsação.

- **Interação:** Aqui foram definidas as iterações entre cada corpo, indicando superfícies de contato, que nesse caso corresponderam a da agulha com o furo interno do Bico.

- **Carregamento e Condições de Contorno:** Foram implementados para cada etapa quais seriam as condições de contorno e as cargas envolvidas na simulação.

- **Malha:** Neste processo foram feitas as malhas do Bico e da agulha, com especial atenção ao refinamento em regiões pré-identificadas como geometria geradora de concentração de tensão. Também foi selecionado o C3D10M como o tipo de elemento a ser utilizado.

- **Cálculo:** Foi dado um nome ao cálculo com as especificações determinadas nos passos anteriores e gerado um arquivo com todas as informações necessárias ao ABAQUS, para então executar o comando de início de simulação.

A simulação do Bico Injetor, feita no ABAQUS, gerou um arquivo do tipo *.txt o qual continham as tensões (S11, S22, S33, S12, S13, S23) e as posições dos nós e dos elementos para as três etapas da simulação. Resultados de simulações na etapa final (etapa 3) das tensões em questão, podem ser vistos na forma de diagrama de cores nas figuras 34, 35, 36, 37, 38, 39.

FIGURA 34 - Distribuição de S11 devido à aplicação da carga máxima em MPa.

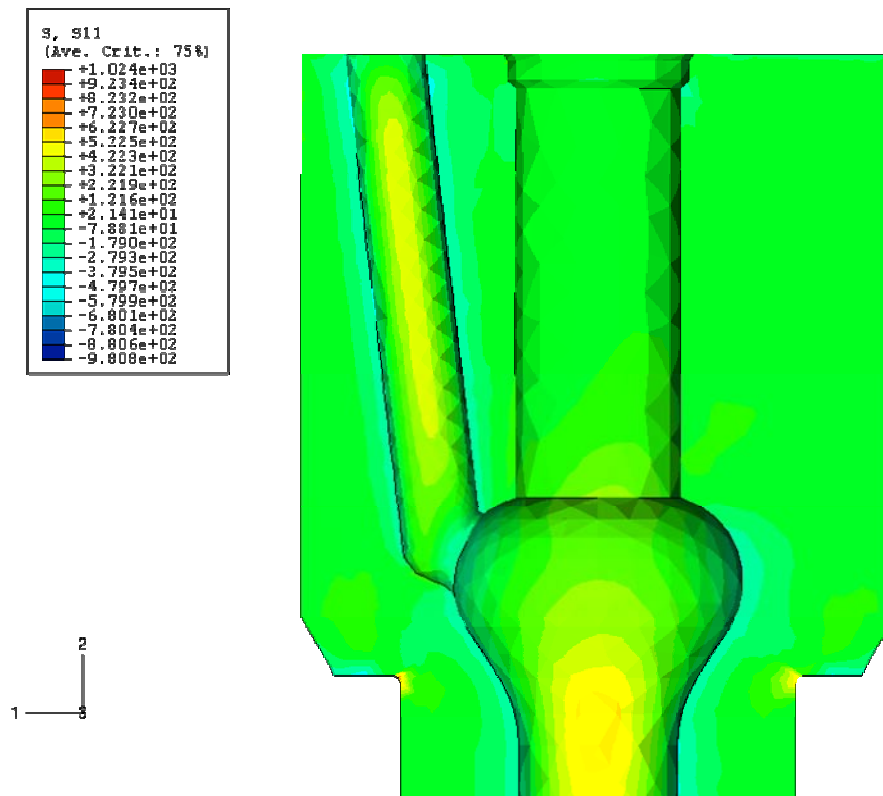


FIGURA 35 - Distribuição de S22 devido à aplicação da carga máxima em MPa.

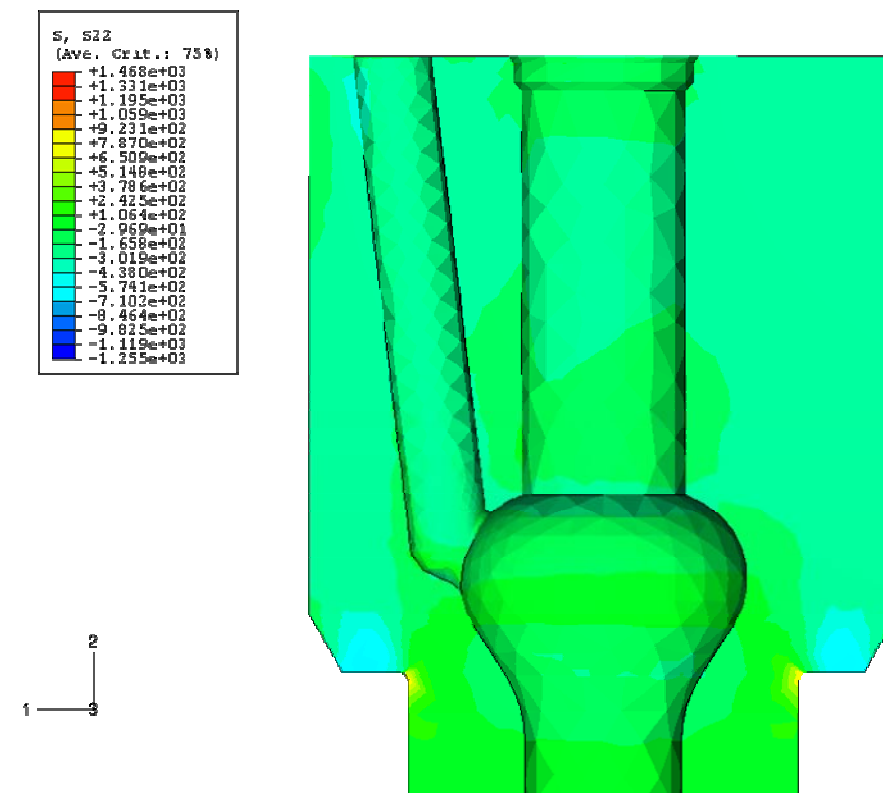


FIGURA 36 - Distribuição de S33 devido à aplicação da carga máxima em MPa.

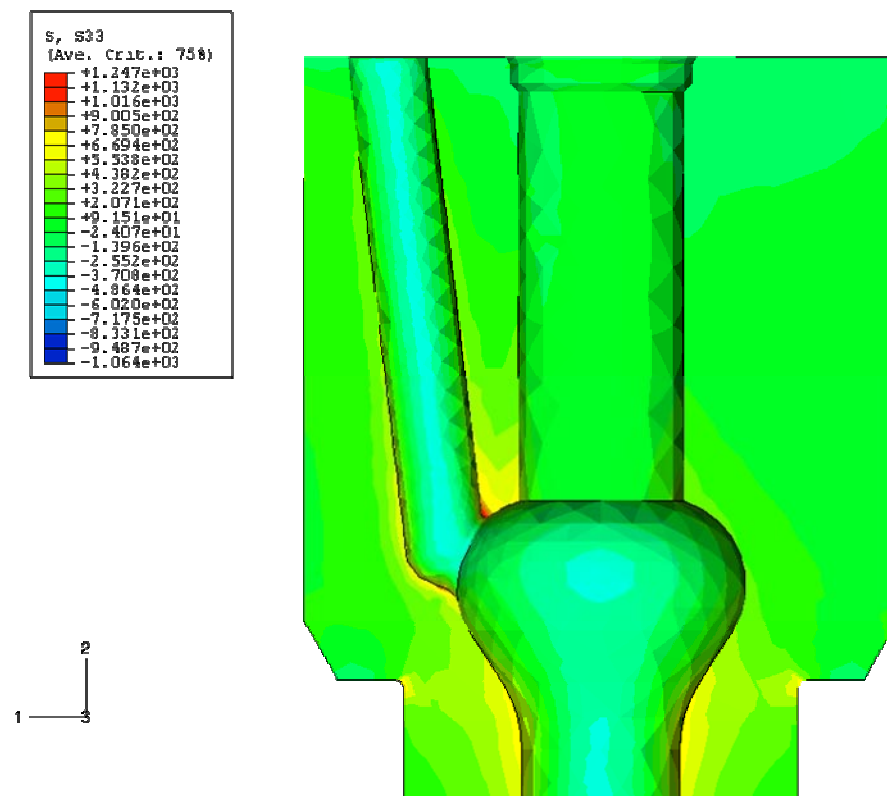


FIGURA 37 - Distribuição de S12 devido à aplicação da carga máxima em MPa.

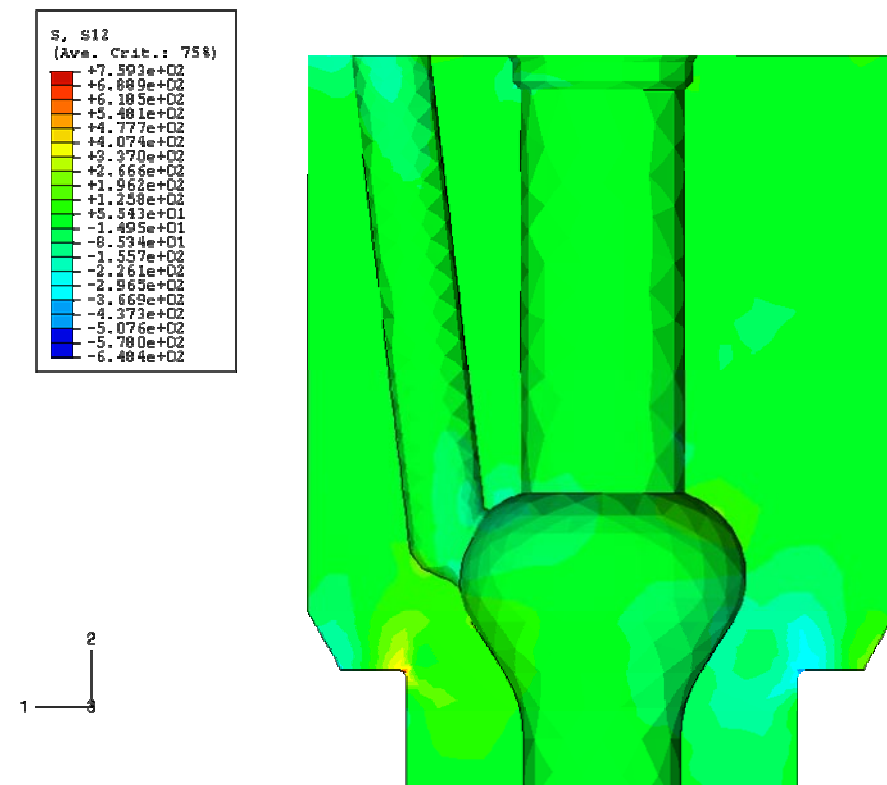


FIGURA 38 - Distribuição de S13 devido à aplicação da carga máxima em MPa.

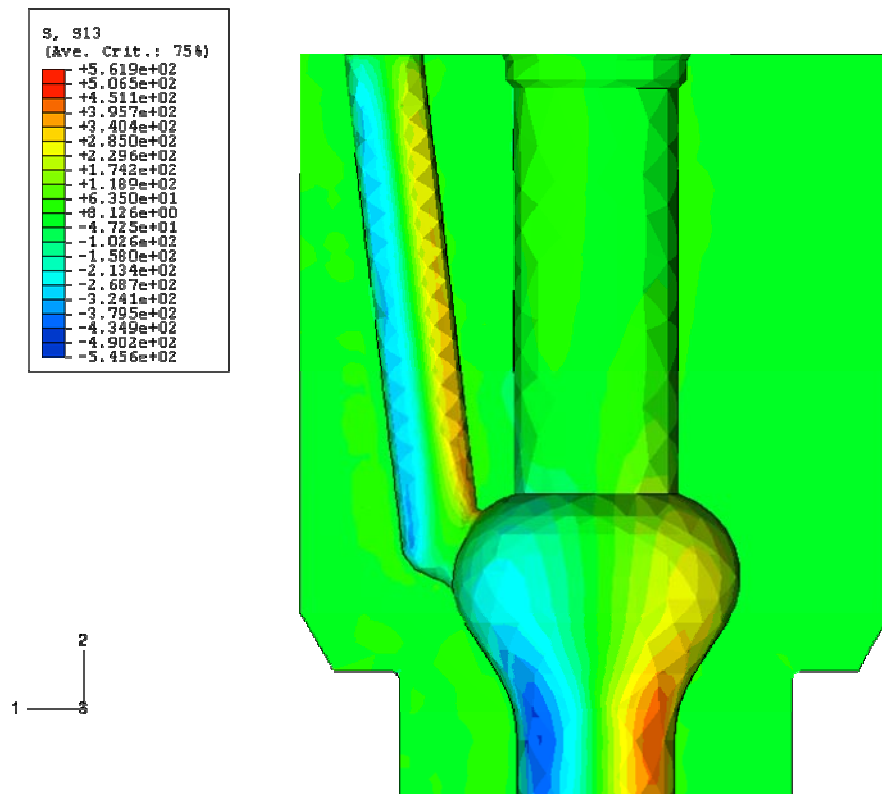
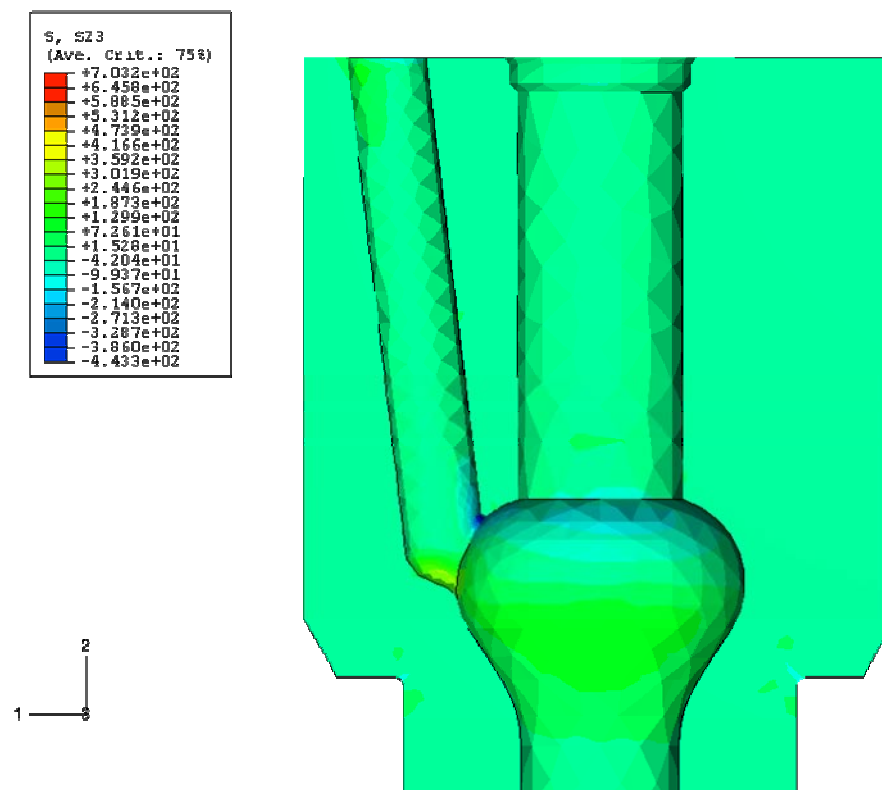


FIGURA 39 - Distribuição de S23 devido à aplicação da carga máxima em MPa.



5.2.3 Implementação numérica do método para avaliação de fadiga

Utilizando os resultados gerados pelo ABAQUS (arquivos *.txt), como dados de entrada para o critério baseado na escala mesoscópica e influência do gradiente de tensões, elaborou-se um programa feito em Fortran. Na implementação do algoritmo, utilizou-se, por aproximação, a influência dos gradientes de tensões apenas nas direções 1, 2 e 3 relativo às influências de S11, S22 e S33 respectivamente, não considerando a influência de torção.

Com estas considerações, pôde-se utilizar a relação do fator de proporcionalidade n com o gradiente de tensões relativo χ^* . Da relação 3.09, tem-se, então, a relação para cada eixo em cada elemento nos estados de carga máxima e mínima do ciclo, $n_{Sii} = 1 + \alpha \chi_{ii}^{*\beta}$, onde, conforme mencionado no item 3.2.6, $\alpha = 0.3873$ e $\beta = 0.3013$, mantendo o mesmo valor para todos os eixos dos elementos.

Utilizando o critério conforme mencionado no item 3.3.2 para um caso 3D, juntamente com o valor de $\sqrt{\langle Ta^2 \rangle}$ mostrado no anexo A, multiplicando-se as tensões utilizadas no critério, S11, S22 e S33, nos estados de carga máxima e mínima, aos seus respectivos fatores de sustentação, tem-se:

$$\begin{aligned} S11' &= n_{11} S11 \\ S22' &= n_{22} S22 \\ S33' &= n_{33} S33 \end{aligned} \tag{5.01}$$

onde Sii' representa as tensões modificadas pela influência do gradiente de tensões e, finalmente, utilizadas no critério da escala mesoscópica.

Outra forma de utilização da influência do gradiente de tensões pode ser visto em PAPADOPOULOS³³, onde, devido à baixa complexidade da distribuição das tensões no caso estudado, foram adotadas outras formas de definição do gradiente de tensões. Entretanto, vale comentar que foi utilizado, como na referência 13, uma restrição no gradiente de tensões. No caso deste trabalho essa restrição é imposta no

gradiente de tensões relativo, χ^* , representada por:

$$\begin{aligned}\chi^* \leq 0 &\Rightarrow \chi = 0, \text{ ou} \\ \sigma_{\max} \leq 0 &\Rightarrow \chi^* = 0\end{aligned}\tag{5.02}$$

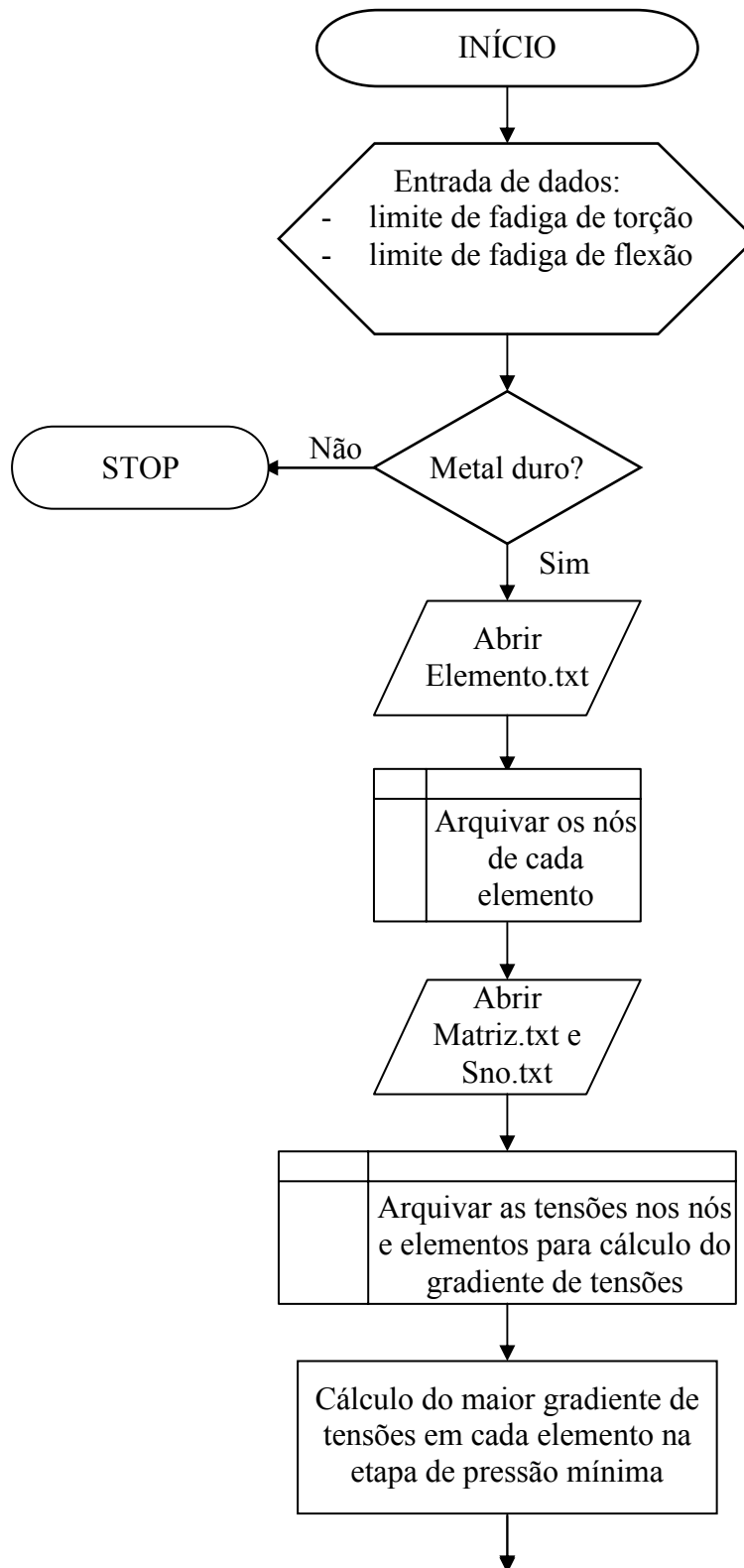
Esta restrição objetiva a não utilização da influência do gradiente de tensões no caso de um ciclo totalmente compressivo das tensões hidrostáticas.

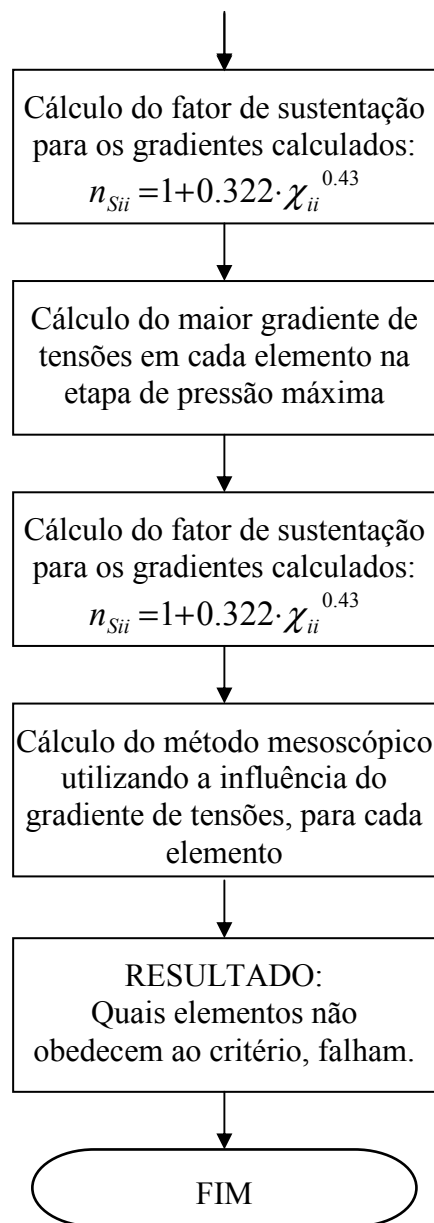
A influência do gradiente de tensões é determinada em cada elemento separadamente, considerando-se as tensões diferentes entre seus nós, calculando os gradientes para cada eixo e utilizando o maior valor encontrado para a determinação dos fatores de sustentação de cada tensão S11, S22 e S33 deste elemento.

Para calcular χ^* em uma direção i ($i=1,2,3$), divide-se a diferença de tensão (S_{ii}) entre dois nós de um elemento pela distância no plano coordenado perpendicular à i , onde i é um dos eixos coordenados 1, 2, ou 3. Isto se repete para todas as combinações de dois nós no elemento e encontra-se para cada eixo o maior valor de gradiente de tensões relativo, para se utilizar na relação. Fazendo este procedimento para cada eixo ($i = 1, 2, 3$) e cada elemento na malha, pode-se determinar a influência do gradiente de tensões.

Na figura 40, pode-se ver o algoritmo utilizado para fazer o programa para predição de fadiga.

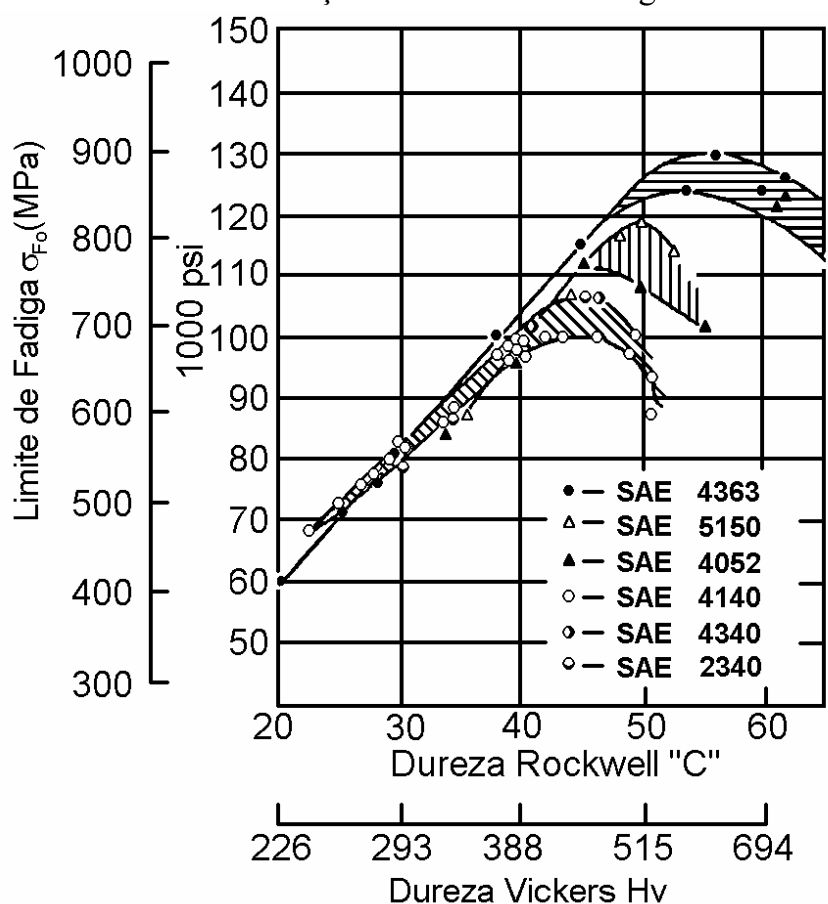
FIGURA 40 - Algoritmo para predição de fadiga.





Do ponto de vista dos materiais, considerou-se uma aproximação linear, com relação à dureza, das propriedades do material sem o tratamento térmico com relação ao material tratado durante a execução do Bico no processo de fabricação, ou seja, a sua dureza do produto final. Esta relação linear pode ser observada nos metais conforme visto na figura 41 (LINKEWITZ ²⁹).

FIGURA 41 - Relação entre limite de fadiga e dureza.



5.3 MODELAGEM COMPUTACIONAL

5.3.1 Descrição do dispositivo e máquina de teste

Foram feitos experimentos no Laboratório da Bosch de Curitiba - PR, que consiste na pulsação hidráulica com óleo, utilizando uma máquina apropriada para ensaios de durabilidade (Maximator), em um Bico sem furos, ou seja, sem saída de óleo, onde a pressão oscila de um valor mínimo, que é sempre de 100 bar, até um valor máximo, que é variável, conforme se pode ver na Tabela 3 no item 5.3.2. Nos testes aplicados aqui, foram utilizadas as seguintes pressões máximas: 1900, 2100, 2300, 2500 e 2700 bar. A forma de onda utilizada para os testes foi a senoidal, que é muito utilizada quando se trata de aplicação de carregamentos cíclicos para testes voltados à

fadiga.

Os Bicos preparados são montados em dispositivos que garantem a vedação da entrada de óleo no Bico, não permitindo vazamento, conforme as figuras 42, 43 e 44. Cada ensaio é executado com seis Bicos, sob a mesma pressão, de modo a se obter a mesma condição para os seis Bicos. Os outros ensaios subseqüentes onde alteram-se a pressão máxima testada, são efetuados com outros seis Bicos novos. Neste estudo foram feitos cinco experimentos, com seis Bicos cada, ou seja, foram testados no total trinta Bicos. Pode-se ver a seguir a Tabela apresentando os testes executados, onde a primeira coluna é o número do Bico, a segunda é o valor máximo da pressão, a terceira é o número de ciclos até a quebra e a quarta coluna possui observações sobre a falha.

FIGURA 42 - Dispositivo e Bico para montagem na máquina de testes.

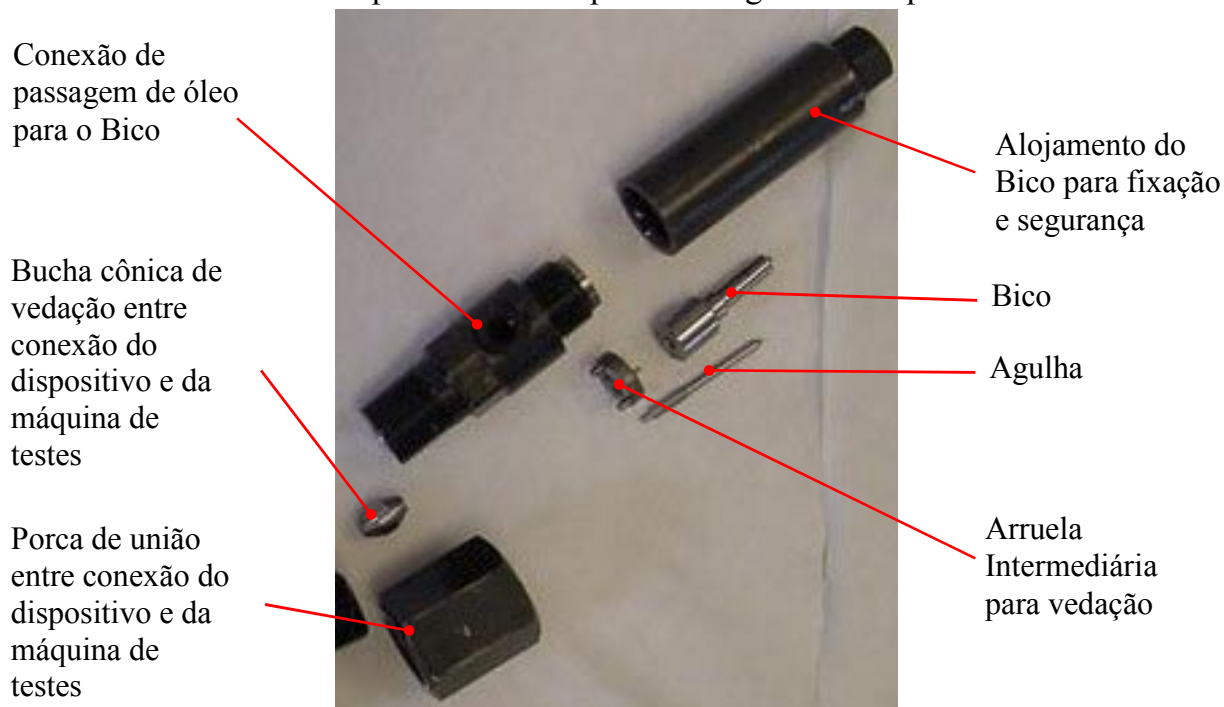


FIGURA 43 - Ordem de montagem do Bico no dispositivo.



FIGURA 44 - Dispositivo montado, com o Bico, para testes.



A figura 45 mostra a máquina de ensaios utilizada, com 3 dispositivos instalados para teste.

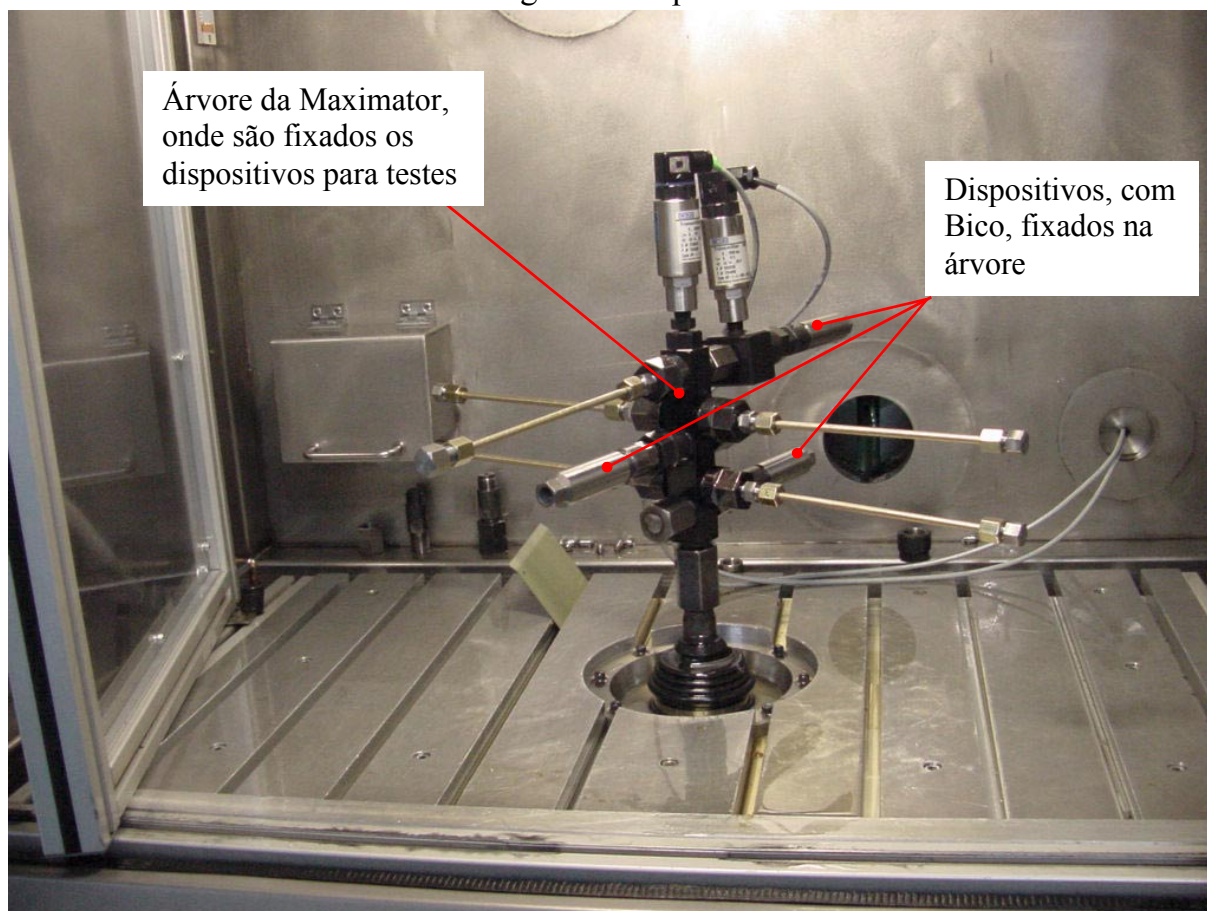
FIGURA 45 - Máquina utilizada para os ensaios (Maximator).



Para montagem do dispositivo, coloca-se o Bico, já com a agulha, no alojamento de fixação. Esse dispositivo fixa o Bico do mesmo modo quando montado em um Porta Injetor, ou seja, aonde a porca de fixação segura o Bico. Também serve como uma segurança a mais, evitando que pedaços do Bico sejam lançados caso haja uma quebra abrupta do mesmo.

Com o Bico no alojamento, coloca-se uma arruela intermediária, para vedação do Bico, rosqueia-se a conexão de passagem de óleo contra a peça de alojamento, aplicando um torque de 90 Nm, coloca-se a bucha cônica para se garantir a vedação do dispositivo com a saída de óleo da máquina e aperta-se o dispositivo na árvore da máquina com a porca de união. O dispositivo montado na máquina pode ser visto na figura 46.

FIGURA 46 - Montagem do dispositivo na Maximator.



5.4 RESULTADOS

5.4.1 Resultados teóricos

O material utilizado no Bico possui uma faixa de valores para o limite de torção variando entre t_{-1min} e t_{-1max} , e limite de flexão entre f_{-1min} e f_{-1max} . Da mesma forma, este material possui uma faixa de dureza, variando entre H_{amin} e H_{amax} . Com o tratamento térmico, a dureza sofre alteração e é modificada passando a ter seus valores variando de H_{dmin} e H_{dmax} .

O valor do limite de fadiga é dito encontrado experimentalmente quando, para um determinado carregamento, 50% das peças falham e 50% sobrevivem, (10^7 ciclos), BOSCH ²⁸, devido a este conceito, para a utilização teórica do critério

mesoscópico modificado, são utilizados os valores médios dos limites de torção, flexão e dureza antes e após o tratamento térmico, que podem ser observados a seguir:

$$\begin{aligned} t_{-1med} &= \frac{t_{-1máx} + t_{-1min}}{2} & f_{-1med} &= \frac{f_{-1máx} + f_{-1min}}{2} \\ H_{a med} &= \frac{H_{a máx} + H_{a min}}{2} & H_{d med} &= \frac{H_{d máx} + H_{d min}}{2} \end{aligned} \quad (5.03)$$

As peças utilizadas nos testes estavam com tratamento térmico, dureza H_d . Como dados de entrada para o cálculo do critério, foram utilizados os valores dos limites de torção e flexão calculados através de uma relação linear direta entre a dureza antes e após o tratamento térmico, conforme pode ser visto no item 5.1.3, esta relação é representada por:

$$\begin{aligned} t_{-1} &= t_{-1med} \cdot \frac{H_{d med}}{H_{a med}} \\ f_{-1} - f_{-1med} &\cdot \frac{H_{d med}}{H_{a med}} \end{aligned} \quad (5.04)$$

O critério de fadiga proposto por Papadopoulos, foi avaliado segundo um índice de erro I , cujo valor varia de -10% a 10% , calculado quando o material está sujeito a cargas que o leva à fadiga. Este erro é tal que a maior probabilidade de ocorrência de falha por fadiga está em 0% e a probabilidade diminui à medida que se aproxima de -10% e 10% . O erro é definido como sendo a diferença relativa entre o lado esquerdo e o lado direito da inequação apresentada na equação 3.25, ou seja:

$$I = \frac{A - \beta}{\beta} (\%) \quad (5.05)$$

Na Tabela 1 podem ser vistos os resultados obtidos com este critério e a aproximação para o material temperado. Foi utilizado o erro maior que -10% e menor que 10% como os limites superior e inferior cujas respectivas tensões máximas variam.

A Tabela 1 apresenta os resultados obtidos com um modelo de predição de fadiga considerando apenas a abordagem mesoscópica.

Tabela 1: Resultados obtidos utilizando apenas o Critério da aproximação mesoscópica

Pressão máxima (bar)	Erro (%)	Observação
3321	-10	Limite mínimo de fadiga
3618	0	Limite de fadiga
3915	10	Limite máximo de fadiga

A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos com um modelo em que se considerou a influência do gradiente de tensões, juntamente com o critério baseado na escala mesoscópica.

Tabela 2: Resultados obtidos com o fator de gradiente de tensões no critério

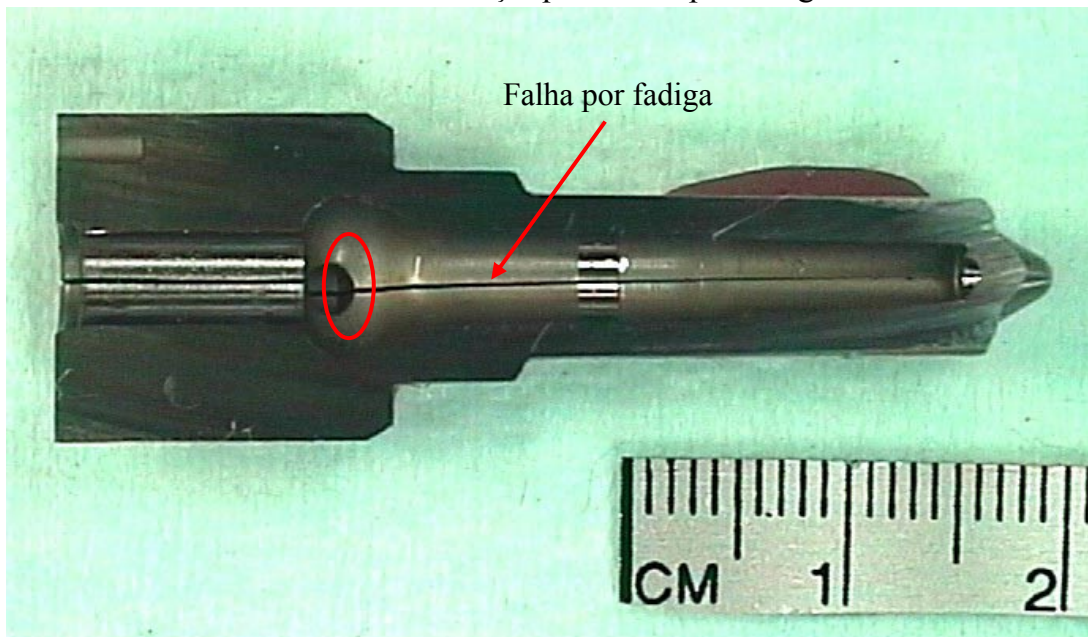
Pressão máxima (bar)	Erro (%)	Observação
2079	-10	Limite mínimo de fadiga
2241	0	Limite de fadiga
2376	10	Limite máximo de fadiga

5.4.2 Resultados experimentais

Foram feitos experimentos no Laboratório da Bosch de Curitiba - PR, que consiste na pulsação hidráulica com óleo, utilizando uma máquina apropriada para ensaios de durabilidade, em um Bico sem furos, ou seja, sem saída de óleo, onde a pressão oscila de um valor mínimo, que é sempre de 100 bar, até um valor máximo que é variável, conforme pode-se ver na Tabela 3. Os ensaios são executado em seis Bicos simultaneamente, com os mesmos valores de pressão, de modo a se obter as mesmas condições para os seis Bicos. Depois para cada nova pressão máxima testada, utilizam-se novos seis Bicos. Neste experimento foram feitos cinco baterias, com seis Bicos cada, ou seja, foram testados, ao total, trinta Bicos. Nos ensaios executados,

quando ocorre a trinca, por se tratar de material duro, ela rapidamente se propaga, um exemplo de peça trincada está ilustrada na figura 47. Desta forma ocorre vazamento de óleo que é detectado pela Maximator como queda de pressão, o que faz com que ela pare o ensaio, detectando o início da fadiga.

FIGURA 47 - Peça que falhou por fadiga.



Na Tabela 3, são apresentados os testes executados, onde a primeira coluna corresponde ao número de identificação do Bico, a segunda é o valor máximo da pressão, a terceira é o número de ciclos até a quebra e a quarta coluna possui observações sobre a falha. Na quarta coluna, vale a pena esclarecer a nomenclatura utilizada:

- O.K.-** A peça identificada na 1ª coluna sobreviveu à quantidade de ciclos indicado na 3ª coluna sem que houvesse formação de trincas.
- Trinca-** A peça teve início de trinca identificada, pela MAXIMATOR, antes que ocorresse propagação.

Ruptura- A peça trincou e a trinca propagou de forma a romper a peça antes que a MAXIMATOR identificasse a queda de pressão devido à falha.

Tabela 3: Teste de durabilidade em Bico Injetor, com variação da pressão máxima.

Nr.	Pressão (bar)	Ciclos $\times 10^6$	Observação	Nr.	Pressão (bar)	Ciclos $\times 10^6$	Observação
1	1900	10.0	O.K.	16	2300	8.0	O.K.
2	1900	10.0	O.K.	17	2300	8.0	O.K.
3	1900	10.0	O.K.	18	2300	8.0	O.K.
4	1900	10.0	O.K.	19	2500	0.10	Ruptura
5	1900	10.0	O.K.	20	2500	0.22	Ruptura
6	1900	10.0	O.K.	21	2500	0.23	Ruptura
7	2100	0.27	Ruptura	22	2500	0.24	Ruptura
8	2100	10.0	O.K.	23	2500	8.0	O.K.
9	2100	10.0	O.K.	24	2500	8.0	O.K.
10	2100	10.0	O.K.	25	2700	0.05	Ruptura
11	2100	10.0	O.K.	26	2700	0.08	Ruptura
12	2100	10.0	O.K.	27	2700	0.09	Ruptura
13	2300	0.13	Trinca	28	2700	0.10	Trinca
14	2300	0.16	Trinca	29	2700	0.21	Trinca
15	2300	0.35	Trinca	30	2700	0.34	Trinca

Obs.: 10 bar \approx 1 Mpa

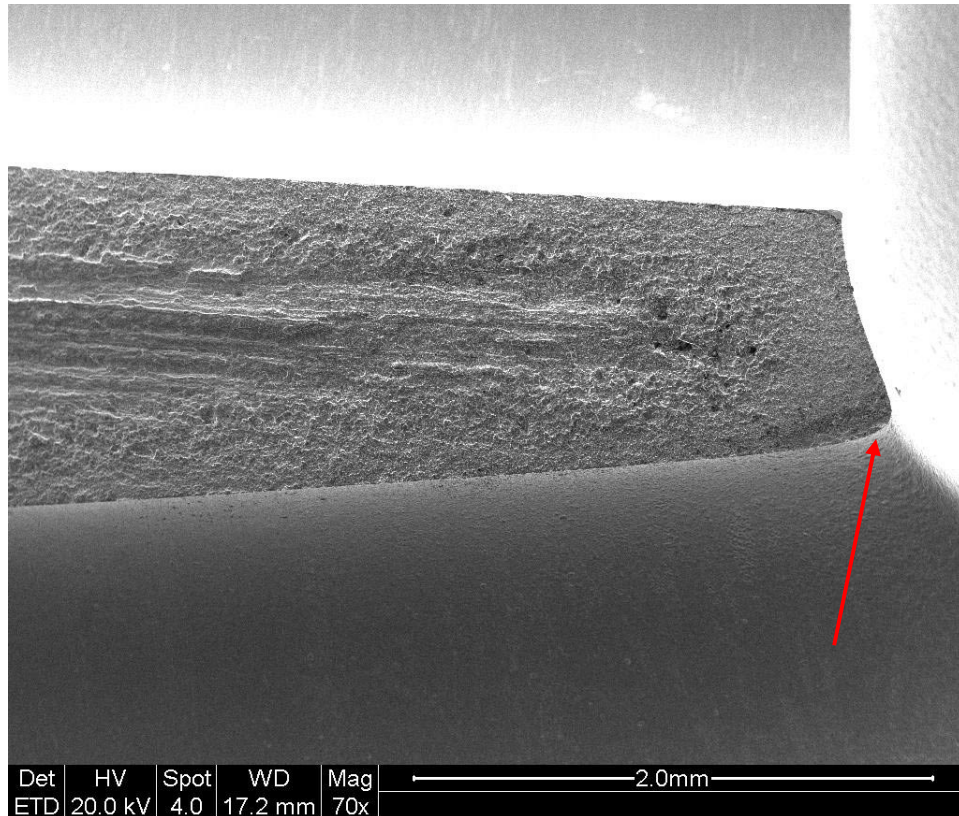
É interessante perceber o caso do Bico número 7, onde, para a pressão de 2100 bar, é o único caso de ruptura. Entretanto, devido ao ciclo baixo para a quebra em comparação com os demais Bicos com esta pressão de ensaio, chega-se à conclusão que trata-se de um caso espúrio, que não deve ser levado em consideração.

5.4.3 Comparação entre resultados teóricos e experimentais

Os resultados obtidos através do Método dos Elementos Finitos e a aplicação do critério de predição baseado na escala mesoscópica indicaram valores bem próximos do encontrado experimentalmente. É necessário também verificar se o local indicado pelo método para ocorrer a fadiga também é próximo ao local onde ocorre a fadiga na prática. Para isto foi examinado um Bico que sofreu o processo de fadiga. Na

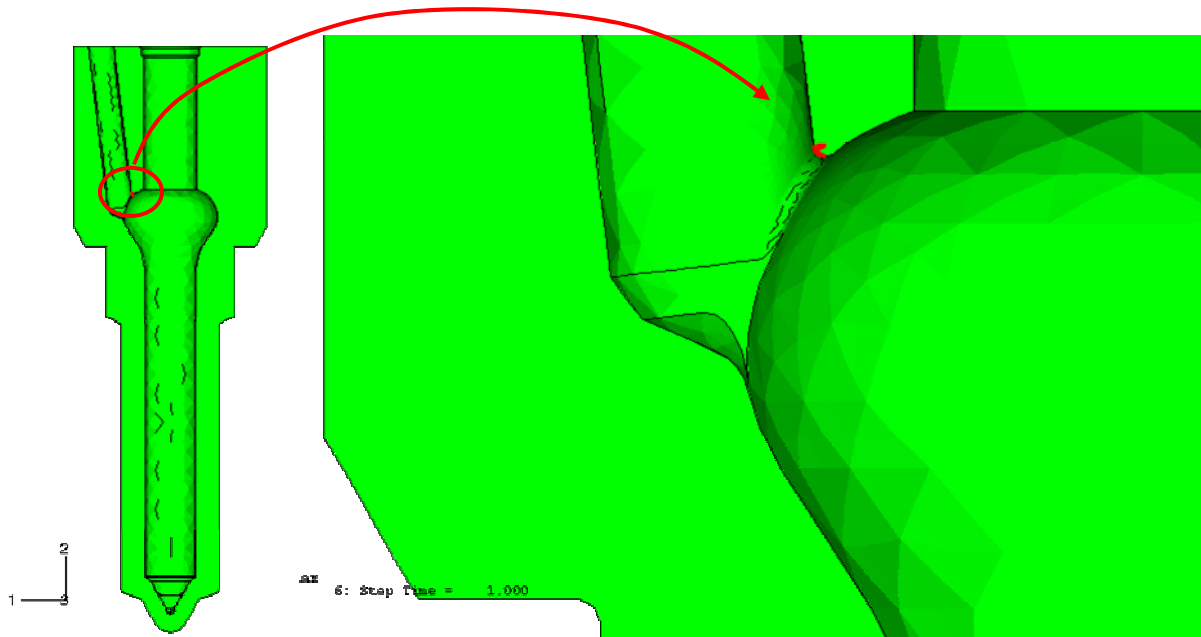
figura 47 a elipse indica o local examinado onde inicia a trinca, o que é mostrado na figura 48.

FIGURA 48 - Local de início de trinca.



Em comparação aos resultados obtidos nos casos práticos, há os resultados calculados a partir do método de predição de fadiga e Elementos Finitos, que também indicam qual seria a localização do início de trinca, figura 49. Esta localização teórica é feita pela análise de cada elemento, no programa implementado, onde, utilizando o fator de influência (fator de proporcionalidade) do gradiente de tensões para este material específico, procura-se analisar qual deles não obedece ao critério da escala mesoscópica, equação 3.16. Uma vez identificado o número dos elementos sujeitos à fadiga para uma determinada aplicação de cargas, a sua identificação visual é feita através do modelo, no ABAQUS, a partir do número de identificação dos elementos com falha, para destacá-los na malha, figura 49.

FIGURA 49 - Local teórico de início de trinca.



A Tabela 1 indica que o limite de fadiga da peça é para pressões a partir de 3618 bar. Entretanto, considerando a precisão do método, $\pm 10\%$, há possibilidades menores de que esse limite de fadiga ocorra para valores de pressões (P) fique compreendidas nos intervalos: $3321 \leq P < 3618$ e $3618 \leq P < 3915$.

Na Tabela 2, devido à utilização da influência do gradiente de tensões, os valores de pressão encontrados foram menores, 2241 bar como maior probabilidade de limite de fadiga e 2079 e 2376 bar como os valores extremos possíveis de serem encontrados.

Os valores encontrados experimentalmente, Tabela 3, indicam que o limite de fadiga do material é 2300 bar, pois conforme mencionado anteriormente, esse limite ocorre para os valores de pressão em que há 50% de falhas ocorridas.

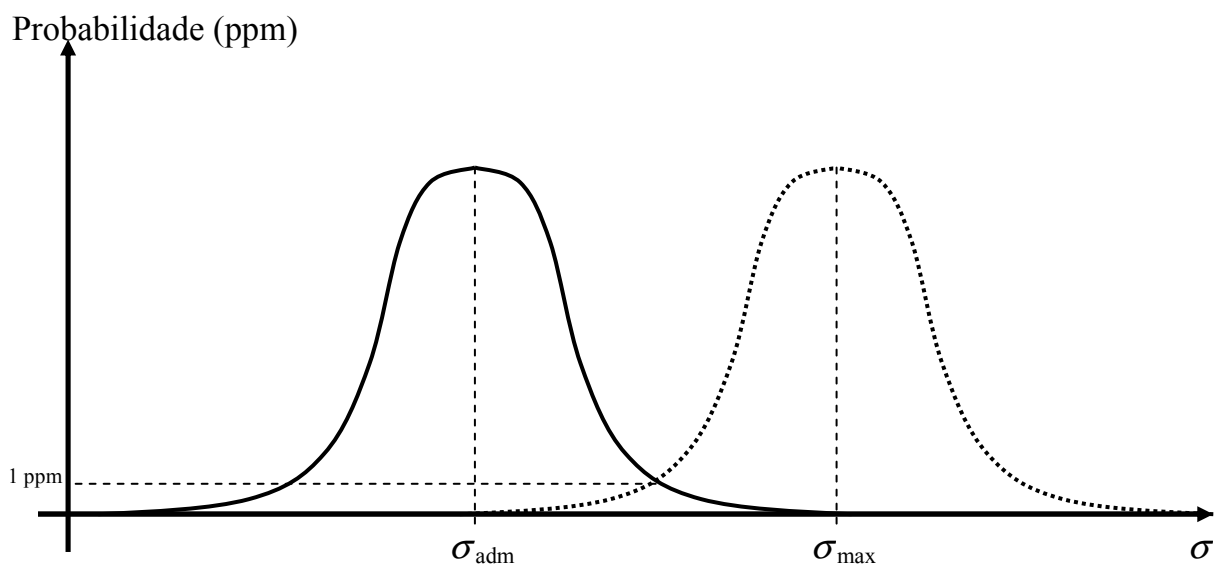
O valor do limite de fadiga encontrado experimentalmente encontra-se dentro da faixa de probabilidade indicada na Tabela 2, e fora da faixa indicada na Tabela 1, o que demonstra como o gradiente de tensões influencia no limite de fadiga. Pode-se afirmar, também, que o critério utilizado, juntamente com a influência do gradiente de tensões pôde prever com sucesso o limite de fadiga do Bico Injetor.

É interessante observar que tanto experimentalmente como pelo critério utilizado, deve-se empregar um coeficiente de segurança (j_s) sobre o valor obtido de forma a garantir no máximo uma parte por milhão de falha (=1 ppm), BOSCH ³⁰, ou seja:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{max}}{j_s} \quad (6.01)$$

Sendo σ_{max} a tensão encontrada no limite de fadiga a 50% de falha (definido no item 5.4.1). Esse coeficiente de segurança tem seu valor maior que 1, de forma a reduzir σ_{max} , com o objetivo de garantir a probabilidade de falha desejada. Para melhor entender isso, na figura 50 pode-se ver um esquema com curvas de probabilidade de falha em função da tensão aplicada. A curva pontilhada representa uma probabilidade de falha quando a tensão está no limite de fadiga (σ_{max}), a curva contínua representa uma probabilidade de falha para uma tensão σ_{adm} . O valor escolhido para σ_{adm} tem que ser tal que o cruzamento das curvas de probabilidade sejam em 1 ppm, o que é determinado utilizando a relação 6.01

FIGURA 50 - Local teórico de início de trinca.



6 CONCLUSÃO

O resultado indica que, a aproximação da curva do material da influência do gradiente de tensões com o fator de proporcionalidade, utilizando a do 42CrMo4, mostrou-se bastante eficiente, obtendo-se resultados bem próximos do experimental.

Este estudo indicou que se pode fazer previsão quanto à fadiga, nesse caso em especial, diminuindo substancialmente a quantidade de ensaios necessários para a determinação experimental do limite de fadiga. Isso elimina dias de testes e dinheiro gasto em horas de máquina e operador, tornando menor o custo do desenvolvimento e aumentando a competitividade do produto. É necessário que o estudo seja ampliado para outras aplicações e produtos, afim de que se possa verificar sua eficiência.

Melhorias do processo podem ser feitas através de levantamentos mais precisos das propriedades do material utilizado. Pode-se também abordar a influência do gradiente de tensões nas direções das tensões principais de cada elemento, ao invés das tensões S_{11} , S_{22} e S_{33} .

Como sugestões para trabalhos futuros, vale a pena repetir esses experimentos, utilizando outros critérios de predição de fadiga, no intuito de comparar com os resultados experimentais e avaliar qual método possui maior eficiência em relação à fadiga de alto ciclo e metais duros. É interessante também, que se possa fazer um estudo dos principais métodos existentes e tentar uma classificação definitiva de qual método apresenta melhores resultados para cada tipo de aplicação, alto ciclo, baixo ciclo, materiais duros, materiais dúcteis, etc..., assim como com suas possíveis combinações.

ANEXO A

Neste anexo, se procura mostrar o desenvolvimento matemático para o critério da aproximação pela escala mesoscópica, quando generalizado para o sistema coordenado de três dimensões. Tomando como referência o item 3.3.2 e reescrevendo as equações 3.10 e 3.11, respectivamente, tem-se:

$$n_x = \sin\theta \cos\varphi \quad n_y = \sin\theta \sin\varphi \quad n_z = \cos\theta$$

$$\ell_x = -\sin\varphi \quad \ell_y = \cos\varphi \quad \ell_z = 0$$

$$r_x = -\cos\theta \cos\varphi \quad r_y = -\cos\theta \sin\varphi \quad r_z = \sin\theta$$

Pela definição da tensão de cisalhamento \mathbf{C} na equação 3.08, pode-se escrever:

$$\mathbf{C}_\ell = \vec{\ell} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \quad \mathbf{C}_r = \vec{r} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (\text{A.01})$$

Utilizando a definição do tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ dada para uma aplicação 3D, tem-se que ao escrever o tensor, de forma a representar o carregamento cíclico, pode-se considerá-lo como uma soma de outros 3 tensores de torção e flexão: no eixo x e plano xy, no eixo y e plano yz e no eixo z e plano xz, onde, para facilitar a visualização, os componentes desses tensores estão representados a seguir por A, B, C, D, E, e F. Desta forma tem-se que:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & D \\ 0 & D & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & F \\ B & C & D \\ F & D & E \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{a1} \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right) + \sigma_{m1} & \tau_{a1} \sin\left(\frac{2\pi}{P}t - \delta_1\right) + \tau_{m1} & \tau_{a3} \sin\left(\frac{2\pi}{P}t - \delta_3\right) + \tau_{m3} \\ \tau_{a1} \sin\left(\frac{2\pi}{P}t - \delta_1\right) + \tau_{m1} & \sigma_{a2} \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right) + \sigma_{m2} & \tau_{a2} \sin\left(\frac{2\pi}{P}t - \delta_2\right) + \tau_{m2} \\ \tau_{a3} \sin\left(\frac{2\pi}{P}t - \delta_3\right) + \tau_{m3} & \tau_{a2} \sin\left(\frac{2\pi}{P}t - \delta_2\right) + \tau_{m2} & \sigma_{a3} \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right) + \sigma_{m3} \end{bmatrix}$$

De forma a auxiliar no desenvolvimento matemático da matriz, tem-se:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{P} - \delta\right) = \cos \delta \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right) - \sin \delta \cos\left(\frac{2\pi}{P}t\right) \quad (\text{A.02})$$

Utilizando a matriz, 3.24, em A.01, desenvolve-se C_ℓ e C_r :

$$\mathbf{C}_\ell: \quad \vec{\ell} \cdot \vec{\sigma} = [-A \sin \varphi + B \cos \varphi - B \sin \varphi + C \cos \varphi - F \sin \varphi + D \cos \varphi] \quad (\text{A.03})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{\ell} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = & -\frac{A}{2} \sin 2\varphi \sin \theta + B \cos^2 \varphi \sin \theta - B \sin^2 \varphi \sin \theta + \frac{C}{2} \sin 2\varphi \sin \theta - \\ & - F \sin \varphi \cos \theta + D \cos \varphi \cos \theta = \frac{C-A}{2} \sin 2\varphi \sin \theta + B \cos 2\varphi \sin \theta + \\ & - F \sin \varphi \cos \theta + D \cos \varphi \cos \theta = \frac{C-A}{2} \sin 2\varphi \sin \theta + B \cos 2\varphi \sin \theta + \\ & + (D \cos \varphi - F \sin \varphi) \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{A.04})$$

Desenvolvendo separadamente os termos encontrados, tem-se que:

- 1º termo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{C-A}{2}\right) \sin 2\varphi \sin \theta = & \frac{(\sigma_{a2} - \sigma_{a1})}{2} \sin 2\varphi \sin \theta \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right) + \\ & + \frac{(\sigma_{m2} - \sigma_{m1})}{2} \sin 2\varphi \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{A.05})$$

- 2º termo:

$$\begin{aligned} B \cos 2\varphi \sin \theta = & \tau_{a1} \cos \delta_{a1} \cos 2\varphi \sin \theta \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right) - \\ & - \tau_{a1} \sin \delta_{a1} \cos 2\varphi \sin \theta \cos\left(\frac{2\pi}{P}t\right) + \tau_{m1} \cos 2\varphi \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{A.06})$$

- 3º termo:

$$\begin{aligned} (D \cos \varphi - F \sin \varphi) \cos \theta = & (\tau_{a2} \cos \delta_2 \cos \varphi - \tau_{a3} \cos \delta_3 \sin \varphi) \cos \theta \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right) - \\ & - (\tau_{a2} \sin \delta_2 \cos \varphi - \tau_{a3} \sin \delta_3 \sin \varphi) \cos \theta \cos\left(\frac{2\pi}{P}t\right) + \\ & + (\tau_{m2} \cos \varphi - \tau_{m3} \sin \varphi) \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{A.07})$$

Desta forma, re-agrupando os termos desenvolvidos A.05, A.06, A.07, tem-se que:

$$\begin{aligned}
C_\ell = & \left[\frac{(\sigma_{a2} - \sigma_{a1})}{2} \sin 2\varphi \sin \theta + \tau_{a1} \cos \delta_1 \cos 2\varphi \sin \theta + (\tau_{a2} \cos \delta_2 \cos \varphi - \right. \\
& \left. - \tau_{a3} \cos \delta_3 \sin \varphi) \cos \theta \right] \sin \left(\frac{2\pi}{P} t \right) + \left[-\tau_{a1} \sin \delta_1 \cos 2\varphi \sin \theta - \right. \\
& \left. - (\tau_{a2} \sin \delta_2 \cos \varphi - \tau_{a3} \sin \delta_3 \sin \varphi) \cos \theta \right] \cos \left(\frac{2\pi}{P} t \right) + \\
& + \left[\frac{(\sigma_{m2} - \sigma_{m1})}{2} \sin 2\varphi \sin \theta + \tau_{m1} \cos 2\varphi \sin \theta + \right. \\
& \left. + (\tau_{m2} \cos \varphi - \tau_{m3} \sin \varphi) \cos \theta \right] \sin \left(\frac{2\pi}{P} t \right) + \left[-\tau_{m1} \sin \delta_1 \cos 2\varphi \sin \theta - \right. \\
& \left. - (\tau_{m2} \sin \delta_2 \cos \varphi - \tau_{m3} \sin \delta_3 \sin \varphi) \cos \theta \right] \cos \left(\frac{2\pi}{P} t \right)
\end{aligned} \tag{A.08}$$

Fazendo:

$$f = \left[\frac{(\sigma_{a2} - \sigma_{a1})}{2} \sin 2\varphi + \tau_{a1} \cos \delta_1 \cos 2\varphi \right] \sin \theta + (\tau_{a2} \cos \delta_2 \cos \varphi - \tau_{a3} \cos \delta_3 \sin \varphi) \cos \theta$$

$$g = \left[-\tau_{a1} \sin \delta_1 \cos 2\varphi \sin \theta - (\tau_{a2} \sin \delta_2 \cos \varphi - \tau_{a3} \sin \delta_3 \sin \varphi) \cos \theta \right]$$

$$h = \left[\frac{(\sigma_{m2} - \sigma_{m1})}{2} \sin 2\varphi \sin \theta + \tau_{m1} \cos 2\varphi \sin \theta + (\tau_{m2} \cos \varphi - \tau_{m3} \sin \varphi) \cos \theta \right]$$

substituindo-se f , g e h em A.08, tem-se que:

$$C_\ell = f \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{P} t \right) + g \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{P} t \right) + h \tag{A.09}$$

De forma análoga para C_r , tem-se que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_r: \quad \vec{r} \cdot \vec{\sigma} = & \left[-A \cos \theta \cos \varphi - B \cos \theta \sin \varphi + F \cos \theta \cos \varphi - C \cos \theta \sin \varphi + D \sin \theta - \right. \\
& \left. - F \cos \theta \cos \varphi - D \cos \theta \sin \varphi + E \sin \theta \right]
\end{aligned} \tag{A.10}$$

como $C_r = \vec{r} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ (A.01), tem-se que:

$$\begin{aligned}
 C_r &= -\frac{A}{2} \cos^2 \varphi \sin 2\theta - \frac{B}{4} \sin 2\varphi \sin 2\theta + F \cos \varphi \sin^2 \theta - \frac{B}{4} \sin 2\varphi \sin 2\theta - \\
 &\quad - \frac{C}{2} \sin^2 \varphi \sin 2\theta + D \sin \varphi \sin^2 \theta - F \cos \varphi \cos^2 \theta - D \sin \varphi \cos^2 \theta + \frac{E}{2} \sin 2\theta \\
 &= -\frac{A}{2} \cos^2 \varphi \sin 2\theta - \frac{B}{2} \sin 2\varphi \sin 2\theta - F \cos \varphi \cos 2\theta - \frac{C}{2} \sin^2 \varphi \sin 2\theta - D \sin \varphi \sin 2\theta + \\
 &\quad + \frac{E}{2} \sin 2\theta = \\
 &= \left(-\frac{A}{2} \cos^2 \varphi - \frac{B}{2} \sin 2\varphi - \frac{C}{2} \sin^2 \varphi - D \sin \varphi + \frac{E}{2} \right) \sin 2\theta - F \cos \varphi \cos 2\theta \quad (A.11)
 \end{aligned}$$

Desenvolvendo separadamente os termos multiplicados pelas funções trigonométricas de θ , tem-se que:

- 1º termo:

$$\frac{A}{2} \cos^2 \varphi = \frac{\sigma_{a1}}{2} \cos^2 \varphi \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right) + \frac{\sigma_{m1}}{2} \cos^2 \varphi \quad (A.12)$$

- 2º termo:

$$\frac{B}{2} \sin 2\varphi = \frac{\tau_{a1}}{2} \cos \delta_1 \sin 2\varphi \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right) - \frac{\tau_{a1}}{2} \sin \delta_1 \sin 2\varphi \cos\left(\frac{2\pi}{P}t\right) + \frac{\tau_{m1}}{2} \sin 2\varphi \quad (A.13)$$

- 3º termo:

$$\frac{C}{2} \sin^2 \varphi = \frac{\sigma_{a2}}{2} \sin^2 \varphi \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right) + \frac{\sigma_{m2}}{2} \sin^2 \varphi \quad (A.14)$$

- 4º termo:

$$D \sin \varphi = \tau_{a2} \cos \delta_2 \sin \varphi \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right) - \tau_{a2} \sin \delta_2 \sin \varphi \cos\left(\frac{2\pi}{P}t\right) + \tau_{m2} \sin \varphi \quad (A.15)$$

- 5º termo:

$$\frac{E}{2} = \sigma_{a3} \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right) + \sigma_{m3} \quad (\text{A.16})$$

- 6º termo:

$$F \cos \varphi = \tau_{a3} \cos \delta_3 \cos \varphi \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right) - \tau_{a3} \sin \delta_3 \cos \varphi \cos\left(\frac{2\pi}{P}t\right) + \tau_{m3} \cos \varphi \quad (\text{A.17})$$

Agrupando-se (A.12), (A.13), (A.14), (A.15), (A.16) e (A.17) em (A.11):

$$\begin{aligned} \Rightarrow C_r = & \left[-\left(\frac{\sigma_{a1}}{2} \cos^2 \varphi + \frac{\tau_{a1}}{2} \cos \delta_1 \sin 2\varphi + \frac{\sigma_{a2}}{2} \sin^2 \varphi + \tau_{a2} \cos \delta_2 \sin \varphi - \sigma_{a3} \right) \sin 2\theta - \right. \\ & \left. - \tau_{a3} \cos \delta_3 \cos \varphi \cos 2\theta \right] \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right) + \left[\left(\frac{\tau_{a1}}{2} \sin \delta_1 \sin 2\delta \varphi + \tau_{a2} \sin \delta_2 \sin \varphi \right) \sin 2\theta + \right. \\ & \left. + \tau_{a3} \sin \delta_3 \cos \varphi \cos 2\theta \right] \cos\left(\frac{2\pi}{P}t\right) - \left[\left(\frac{\sigma_{m1}}{2} \cos^2 \varphi + \frac{\tau_{m1}}{2} \sin 2\varphi + \frac{\sigma_{m2}}{2} \sin^2 \varphi + \right. \right. \\ & \left. \left. + \tau_{m2} \sin \varphi - \sigma_{m3} \right) \sin 2\theta - \tau_{m3} \cos \varphi \cos 2\theta \right] \quad (\text{A.18}) \end{aligned}$$

Fazendo:

$$p = -\left(\frac{\sigma_{a1}}{2} \cos^2 \varphi + \frac{\tau_{a1}}{2} \cos \delta_1 \sin 2\varphi + \frac{\sigma_{a2}}{2} \sin^2 \varphi + \tau_{a2} \cos \delta_2 \sin \varphi - \sigma_{a3} \right) \sin 2\theta - \tau_{a3} \cos \delta_3 \cos \varphi \cos 2\theta$$

$$q = \left(\frac{\tau_{a1}}{2} \sin \delta_1 \sin 2\delta \varphi + \tau_{a2} \sin \delta_2 \sin \varphi \right) \sin 2\theta + \tau_{a3} \sin \delta_3 \cos \varphi \cos 2\theta$$

$$m = -\left(\frac{\sigma_{m1}}{2} \cos^2 \varphi + \frac{\tau_{m1}}{2} \sin 2\varphi + \frac{\sigma_{m2}}{2} \sin^2 \varphi + \tau_{m2} \sin \varphi - \sigma_{m3} \right) \sin 2\theta + \tau_{m3} \cos \varphi \cos 2\theta$$

então,

$$C_r = p \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right) + q \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{P}t\right) + m \quad (\text{A.19})$$

As equações A.09 e A.19 são equações paramétricas que descrevem uma elipse no sistema O.lr. Com isto, conforme o item 3.3.2, tem-se que:

$$\sqrt{\langle Ta^2 \rangle} = \sqrt{\frac{5}{8\pi} \left[\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} f^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi + \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} g^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi + \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} p^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi + \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} q^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \right]} \quad (\text{A.20})$$

Desenvolvendo os termos de $\sqrt{\langle Ta^2 \rangle}$,

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} f^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \frac{\pi}{12} \left[(10+3\pi) \left(\frac{(\sigma_{a2} - \sigma_{a1})^2}{4} + \tau_{a1} \cos^2 \delta_1 \right) + (14-3\pi)(\tau_{a2}^2 \cos^2 \delta_2 + \tau_{a3}^2 \cos^2 \delta_3) \right] = \pi F \quad (\text{A.21})$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} g^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \frac{\pi}{12} \left[(10+3\pi)\tau_{a1}^2 \sin^2 \delta_1 + (14-3\pi)(\tau_{a2}^2 \sin^2 \delta_2 + \tau_{a3}^2 \sin^2 \delta_3) \right] = \pi G \quad (\text{A.22})$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} p^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \frac{\pi}{60} \left[\left(\tau_{a2}^2 \cos^2 \delta_2 + \frac{\tau_{a1}^2}{4} \cos^2 \delta_1 + \frac{(\sigma_{a1} - \sigma_{a2})^2}{16} + \frac{(\sigma_{a1} + \sigma_{a2} + 4\sigma_{a3})^2}{8} - \frac{(\sigma_{a1} - \sigma_{a2})}{2} \tau_{a2} \right) (94-15\pi) + \tau_{a3}^2 \cos^2 \delta_3 (26+15\pi) \right] = \pi P \quad (\text{A.23})$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} q^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \frac{\pi}{60} \left[\left(\frac{\tau_{a1}^2}{8} \sin^2 \delta_1 + \tau_{a2}^2 \sin^2 \delta_2 \right) (94-15\pi) + \tau_{a3}^2 \sin^2 \delta_3 (26+15\pi) \right] = \pi Q \quad (\text{A.24})$$

Então, reescrevendo A.20, utilizando A.21, A.22, A.23 e A.24:

$$\Rightarrow \sqrt{\langle Ta^2 \rangle} = \sqrt{5} \sqrt{\frac{1}{8\pi} [\pi F + \pi G + \pi P + \pi Q]} = \sqrt{\frac{5}{8}} \sqrt{(F + G + P + Q)}$$

onde:

$$F = \frac{(10+3\pi)}{12} \left(\frac{(\sigma_{a2} - \sigma_{a1})^2}{4} + \tau_{a1} \cos^2 \delta_1 \right) + \frac{(14-3\pi)}{12} (\tau_{a2}^2 \cos^2 \delta_2 + \tau_{a3}^2 \cos^2 \delta_3)$$

$$G = \frac{(10+3\pi)}{12} \tau_{a1}^2 \sin^2 \delta_1 + \frac{(14-3\pi)}{12} (\tau_{a2}^2 \sin^2 \delta_2 + \tau_{a3}^2 \sin^2 \delta_3)$$

$$P = \frac{(94-15\pi)}{60} \left(\tau_{a2}^2 \cos^2 \delta_2 + \frac{\tau_{a1}^2}{4} \cos^2 \delta_1 + \frac{(\sigma_{a1} - \sigma_{a2})^2}{16} + \frac{(\sigma_{a1} + \sigma_{a2} + 4\sigma_{a3})^2}{8} - \frac{(\sigma_{a1} - \sigma_{a2})}{2} \tau_{a2} \right) + \frac{(26+15\pi)}{60} \tau_{a3}^2 \cos^2 \delta_3$$

$$Q = \frac{(94-15\pi)}{60} \left(\frac{\tau_{a1}^2}{8} \sin^2 \delta_1 + \tau_{a2}^2 \sin^2 \delta_2 \right) + \frac{(26+15\pi)}{60} \tau_{a3}^2 \sin^2 \delta_3$$

Logo, a formulação da variável relacionada à deformação plástica acumulada, utilizada no algoritmo do critério baseado na escala mesoscópica, generalizado para um caso de três dimensões, fica:

$$\Rightarrow \sqrt{\langle Ta^2 \rangle} = \left[\frac{5}{480} \left(\frac{(294+45\pi)}{16} ((\sigma_{a2} - \sigma_{a1})^2 + 4\tau_{a1}^2) + \frac{(94-15\pi)}{8} ((\sigma_{a1} + \sigma_{a2} + 4\sigma_{a3})^2 - 4(\sigma_{a1} - \sigma_{a2})\tau_{a2}) + (164-30\pi)\tau_{a2}^2 + 96\tau_{a3}^2 \right) \right]^{1/2} \quad (A.25)$$

A pressão hidrostática máxima, que é o fator utilizado para representar a influência das tensões normais à trinca, é calculada utilizando os valores máximos de S11, S22 e S33 para cada elemento. Desta forma se escreve:

$$\sigma_{H,\max} = ((\sigma_{m1} + \sigma_{a1}) + (\sigma_{m2} + \sigma_{a2}) + (\sigma_{m3} + \sigma_{a3}))/3 \quad (A.26)$$

REFERENCIAS

1. PAPADOPOULOS, I. V., *Multiaxial fatigue limit criterion of metals: a Mesoscopic Scale Approach*, High-cycle metal fatigue: from theory to applications, CISM Courses and Lectures, No 392, pp.89-136.
2. FUCHS, H. O., STEPHENS, R. I., *Metal fatigue in engineering*, John Wiley & Sons, United States of America, 1980.
3. CRUZ, I. C. P. da, *Um modelo de acomodação para a fadiga de alto ciclo nos metais*: Tese de doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.
4. PAPADOPOULOS, I. V., 1997, *A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals*, Int. J. Fatigue Vol. 19., No. 3, pp. 219-235.
5. McDIARMID, D. L., *A general criterion for high cycle multiaxial fatigue failure*, Fatigue Fract. Engng Mater. Struct. Vol. 14, No. 4, pp. 429-453, 1991.
6. McDIARMID, D. L., *A shear stress based critical-plane criterion of multiaxial fatigue failure for design and life prediction*, Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. Vol. 17, No. 12, pp. 1475-1484, 1994.
7. MARIN, J., *Interpretation of fatigue strengths for combined stresses*, Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals, Institution of Mechanical Engineers, London, pp. 184-194, 1956.
8. CROSSLAND, B., *Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel*, Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals, Institution of Mechanical Engineers, London, pp. 138-149, 1956.
9. DE-GUANG, S., DE-JUN, W., *A new multiaxial fatigue damage model based on the critical plane approach*, International Journal of Fatigue Vol. 20, No.3, pp.241-245, 1998.
10. KLIMAN, V., *Fatigue life estimation under random loading using the energy criterion*, International Journal of Fatigue, No.1, pp.39-44, 1985.
11. MACHA, E., SONSINO, C. M., *Energy criteria of multiaxial fatigue failure*, Fatigue Fract Engn Mater Strucu Vol 22, pp.1053-1070, 1999.
12. ŁAGODA, T., MACHA, E., BĘDKOWSKI, W., *A critical plane approach based on energy concepts: application to biaxial random tension-compression high-cycle fatigue regime*, International Journal of Fatigue Vol.21, pp. 431-443, 1999.
13. FARAHANI, A. V., *A new energy-critical plane parameter for fatigue life assessment of various metallic materials subjected to in-phase and out-of-phase multiaxial fatigue loading conditions*, International Journal of Fatigue Vol. 22, pp. 295-305, 2000.

14. PARK, J., NELSON, D., *Evaluation of an energy-based approach and a critical plane approach for predicting constant amplitude multiaxial fatigue life*, International Journal of Fatigue Vol. 22, pp.23-39, 2000.
15. LEE, B. L., KIM, K. S., NAM, K. M., *Fatigue analysis under variable amplitude loading using a energy parameter*, International Journal of Fatigue Vol. 25, pp. 621-631, 2003.
16. PAPADOPOULOS, I. V., *A new criterion of fatigue strength for out-of-phase bending and torsion of hard metals*, Fatigue, Vol 16, pp. 377-384, 1994.
17. PAPADOPOULOS, I. V., *A high-cycle fatigue criterion applied in biaxial and triaxial out-of-phase stress conditions*, Fatigue Fract. Engng Mater. Struct. Vol. 18, No. 1, pp. 79-91, 1995.
18. PAPADOPOULOS, I. V., PANOSKALTSIS, V. P., *Invariant formulation of a gradient dependent multiaxial high-cycle fatigue criterion*, Engineering Fracture Mechanics Vol. 55, No. 4, pp. 513-528, 1996.
19. MOREL, F., *A fatigue life prediction method based on a mesoscopic approach in constant amplitude multiaxial loading*, Fatigue Fract. Engng Mater. Struct. Vol. 21, pp. 241-256, 1998.
20. MOREL, F., PALIN-LUC, T., FROUSTEY, C., *Comparative study and link between mesoscopic and energetic approaches in high cycle multiaxial fatigue*, International Journal of Fatigue Vol. 23, pp. 317-327, 2001.
21. CRUZ, I., ZOUAIN, N., *A shakedown model for high-cycle fatigue*, Fatigue Fract. Engng Mater. Struct. Vol. 26, 123-135, 2003.
22. TORRES, M. P. C., HECKE, M. B., MACHADO, R. D., *Método de análise de falha por fadiga em metais duros*, CILAMCE – Congresso Ibero Americano de Mecânica Computacional em Engenharia, Ouro Preto, MG., Brasil, 2003.
23. DOWLING, N. E., *Mechanical Behavior of Materials: Engineering Methods for Deformation, Fracture and Fatigue*, Prentice Hall, 1998.
24. OLIVEIRA, A. M. de, *Análise dinâmica e cálculo da fadiga de estruturas de plataformas marítimas*: Dissertação de mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1985.
25. FAIRES, V., M., *Elementos Orgânicos de Máquinas*, SEDEGRA, Rio de Janeiro, pp.135-138, 1966.
26. CETLIN, P. R.; SILVA, P. S. P. da, *Análise de fraturas*. Associação Brasileira de Metais (ABM). [São Paulo], Édile Serviços Gráficos, p. 201-232.
27. TAYLOR, D. and WANG, G., *The validation of some methods of notch fatigue analysis*, © 2000 Blackwell Science Ltd. Fatigue Fract Engng Mater Struct **23**, p. 387-394.
28. SOCIE, D. F.; MARQUIS, G. B., *Multiaxial Fatigue*, SAE International, 2000.

29. LINKEWITZ, T., *Berechnung der Wechsefestigkeit von gekerbten und mehrachsigen beanspruchten Proben de Stahls 100Cr6 im Bainitischen Zustand*, Dissertation Universität Bremen, Bremen, 1998
30. BOSCH, *Seminários Internos*: Documentação técnica, 2003.
31. SINES, G., *In Metal Fatigue*, McGraw-Hill, New York, 1959, pp.145-169.
32. DAVOLI, P., BERNASCONI, A., FILIPPINI, M., FOLETTI, S., PAPADOPOULOS, I. V., *Independence of the torsional fatigue limit upon a mean shear stress*, International Journal of Fatigue Vol. 25, pp.471-480, 2003.
33. HUGHES, T. J. R., *The Finite Element Method: Linear Atatic and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
34. ABAQUS, *Manual teórico*: Elementos, 2003.